DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul III, nr. 6 / 2020

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacţia: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești, Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul III, Nr. 6, Decembrie 2020

Cuprins

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

Two Identities and their Consequences

Emmanuel Antonio José García [1]

The Heron's formula [1, 4, 7, 14, 15, 17, 18], named after Hero of Alexandria, gives the area of a triangle when the length of all three sides are known. Indian mathematician and astronomer Brahmagupta, in the seventh century, gave the analogous formula for a cyclic convex quadrilateral [6, 10]. In 1842 German mathematician Carl Bretschneider related the area of a general convex quadrilateral to its side lengths and the sum of two opposite angles [5, 8, 11]. Heron's formula is a special case of Brahmagupta's formula for the area of a cyclic quadrilateral. Heron's formula and Brahmagupta's formula are both special cases of Bretschneider's formula for the area of a quadrilateral.

In this note we prove the Heron's formula (although known, see Conway's dicussion in [7]), the Brahmagupta's formula (also known, see [6]) and the formula for the area of a bicentric quadrilateral (possibly new, see [12, 13]), $\sqrt{abcd}$, based on two lesser-known trigonometric formulae [6, 16] involving sine, cosine, the semiperimeter and the side lenghts of a cyclic quadrilateral. Once the two trigonometric formulae have been established (and the necessary adjustments made), the proofs of these area theorems are greatly simplified. Furthermore, we present a generalization of the two aforementioned trigonometric formulae and use it to give an alternative proof of Bretschneider's formula. Since all these area theorems can be derived from this new generalization, the approach presented in this note, unlike others, provides a more holistic view of these theorems. Our main result for a general convex quadrilateral are the identities

$$ad\sin^2\frac{\alpha}{2}+bc\cos^2\frac{\gamma}{2}=(s-a)(s-d)$$

and

$$bc\sin^2\frac{\gamma}{2}+ad\cos^2\frac{\alpha}{2}=(s-b)(s-c),$$

where a, b, c, d are the sides lengths, s is the semiperimeter, and α and γ are opposite angles.

We recall a cyclic quadrilateral is a quadrilateral whose vertices all lie on a single circle. Among other characterizations, a convex quadrilateral $ABCD$ is cyclic if and only if its opposite angles are supplementary, that is $\alpha+\gamma=180^\circ$ [19] (see Figure 1).

Theorem 1. *Let $ABCD$ be a cyclic convex quadrilateral with $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ and $s=\frac{a+b+c+d}{2}$. If $\angle BAD=\alpha$, then*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}\quad \textit{and}\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}. \tag{1}$$

[1] Professor, Santo Domingo, Dominican Republic, emmanuelgeogarcia@gmail.com

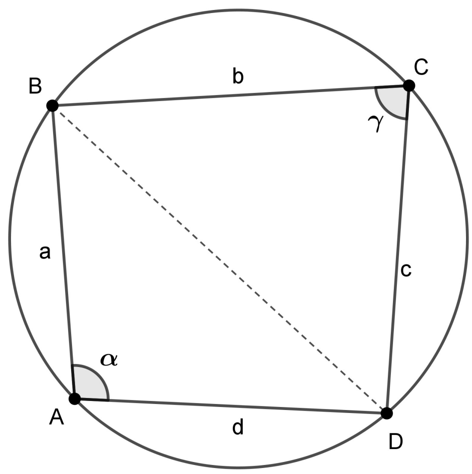


Fig. 1: A cyclic quadrilateral $ABCD$.

Proof. First we will find an expression for $\cos\alpha$ in terms of a, b, c and d. Let $\angle BCD = \gamma$. By the Law of Cosines and keeping in mind that α and γ are supplementary, we have

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \alpha).$$

Yielding $\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$. Now, making use of the half angle formula for cosine,

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{4(ad+bc)} \tag{2}$$

$$= \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{4(ad+bc)}$$

$$= \frac{(a+b-c+d)(a-b+c+d)}{4(ad+bc)} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{ad+bc}\left(\frac{a+b+c+d}{2} - c\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2} - b\right)$$

$$= \frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}.$$

□

The other formulae can be obtained similarly by replacing $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ by $1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ in (2).

In personal email communication with Peter Doyle [7], the renowned mathematician J. H. Conway has given the same proof of Heron's formula that we present here. However, as the aim of this paper is to present these area theorems as mere links of a chain of related theorems from a new standpoint, we deduce (4) in a different way by just setting $c = 0$ in (1).

Here, Δ_0, Δ_1, Δ_2 and Δ_3 stand for the areas of a triangle, a cyclic quadrilateral, a bicentric quadrilateral and a general quadrilateral, respectively.

Theorem 2 (Heron)**.** *Let a triangle $\triangle ABD$ has sides $AB = a$, $BC = b$ and $AD = d$, then the area is given by the formula*

$$\Delta_0 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}.$$

Proof. For a triangle, if in (1) we assume $c = 0$, then we have the well-known formulae[1]

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-a)(s-d)}{ad} \quad \text{and} \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-b)}{ad}. \tag{4}$$

Making use of the double-angle identity for sine we have

$$\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{s(s-b)}{ad}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad}} = 2\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}}{ad}.$$

Since $\Delta_0 = \frac{ad\sin\alpha}{2}$, it follows

$$\Delta_0 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}.$$

□ As mentioned, the following proof of Brahmagupta's formula is known. However, no further generalizations of (1) are given in [6].

Theorem 3 (Brahmagupta)**.** *Given an cyclic quadrilateral, $ABCD$, with sides a, b, c, d and semiperimeter, s, then its area is given by the formula*

$$\Delta_1 = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Proof. Let α and γ are two opposite angles. The area of $ABCD$ can be expressed as the sum of the area of $\triangle ABD$ and $\triangle BCD$, which in turn can be written as $\frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin\gamma}{2}$. Keeping in mind that α and γ are supplementary and applying the formulae in (1) we have

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin(180^\circ - \alpha)}{2} \\
&= \frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin\alpha}{2} \\
&= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(ad+bc) \\
&= \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}(ad+bc) \\
&= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.
\end{aligned}$$

□

A bicentric quadrilateral is a convex quadrilateral that has both an incircle and a circumcircle (see Figure 2). One characterization states that a convex quadrilateral ABCD with sides a, b, c, d is bicentric if and only if opposite sides satisfy $a + c = b + d$ and its opposite angles are supplementary [19]. Another property of a bicentric quadrilateral is that its area is given by the formula $\sqrt{abcd}$. Six derivations of this formula can be found in [12, 13]. One derivation is to use $a + c = b + d$ in Brahmagupta's Formula. Here we shall give a seventh proof which is independent from Brahmagupta's Formula.

Theorem 4. *Given an bicentric quadrilateral, $ABCD$, with sides a, b, c and d, then its area is given by the formula*

$$\Delta_2 = \sqrt{abcd}.$$

[1] For more implications in a triangle see [9].

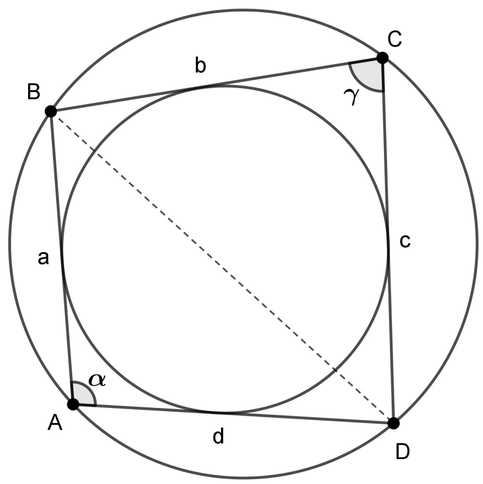


Fig. 2: A bicentric quadrilateral $ABCD$.

Proof. Since $a+c=b+d$ in a bicentric quadrilateral, the formula (3) reduces to

$$cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{ad}{ad+bc}.$$

Similarly we can get $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{bc}{ad+bc}$. Now, following the same steps as in Brahmagupta's formula

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{ad\sin\alpha}{2}+\frac{bc\sin\left(180^\circ-\alpha\right)}{2}\\ &= \frac{ad\sin\alpha}{2}+\frac{bc\sin\alpha}{2}\\ &= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(ad+bc)\\ &= \sqrt{\frac{bc}{ad+bc}}\sqrt{\frac{ad}{ad+bc}}(ad+bc)\\ &= \sqrt{abcd}.\end{aligned}$$

□

The following theorem generalizes Theorem 1 for a general convex quadrilateral.

Theorem 5. *Let a, b, c, d be the sides of a general convex quadrilateral, s is the semiperimeter, and α and γ are opposite angles, then*

$$ad\sin^2\frac{\alpha}{2}+bc\cos^2\frac{\gamma}{2}=(s-a)(s-d) \tag{5}$$

and

$$bc\sin^2\frac{\gamma}{2}+ad\cos^2\frac{\alpha}{2}=(s-b)(s-c). \tag{6}$$

Proof. By the Law of Cosines,

$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\gamma.$$

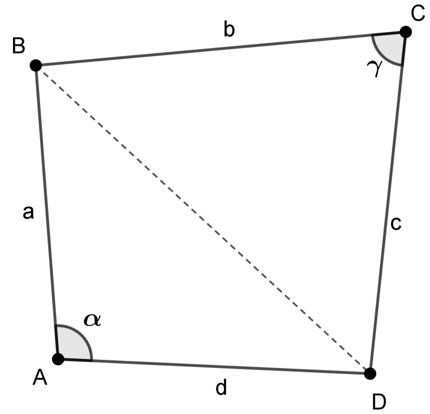


Fig. 3: A general convex quadrilateral ABCD.

Yielding $\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2+2bc\cos\gamma}{2ad}$. Now, making use of the half angle formula for cosine,

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{a^2+d^2+2ad-b^2-c^2+2bc\cos\gamma}{4ad} \\ &= \frac{a^2+d^2+2ad-b^2-c^2+2bc(1-2\sin^2\frac{\gamma}{2})}{4ad} \\ &= \frac{(a+d)^2-(b-c)^2-4bc\sin^2\frac{\gamma}{2}}{4ad} \\ &= \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)-4bc\sin^2\frac{\gamma}{2}}{4ad} \\ &= \frac{1}{ad}\left(\frac{a+b+c+d}{2}-c\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2}-b\right)-\frac{bc\sin^2\frac{\gamma}{2}}{ad} \\ &= \frac{(s-b)(s-c)-bc\sin^2\frac{\gamma}{2}}{ad}.\end{aligned} \tag{7}$$

□

As in Theorem 1, the other formula can be obtained similarly by replacing $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ by $1-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ in (7).

In the case of a cyclic convex quadrilateral, you get (1) by replacing $\frac{\gamma}{2}$ by $90° - \frac{\alpha}{2}$ in (5) and (6), since $\alpha+\gamma = 180°$.

Theorem 6 (Bretschneider)**.** *Given a general quadrilateral with sides a, b, c and d. If α and γ are two opposite angles, then the area is given by the formula*

$$\Delta_3 = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}.$$

Proof. Multiplying (5) and (6) we get

$$\left(ad\sin^2\frac{\alpha}{2} + bc\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\left(bc\sin^2\frac{\gamma}{2} + ad\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Expanding, factorizing, completing the squares and keeping in mind some well-known trigonometric identities,

$$abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + \left(\frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin\gamma}{2}\right)^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Since the area of $ABCD$ can be expressed as the sum of the areas of $\triangle ABD$ and $\triangle CBD$, which in turn can be written as $\frac{ad\sin\alpha}{2}+\frac{bc\sin\gamma}{2}$, then we are done. $\square$

It is interesting to note the resemblance of these area theorems to the identities (4), (1), (5) and (6). Indeed, as Heron's formula and Brahmagupta's formula are both special cases of Bretschneider's formula, in the same way, the identities (4) and (1) are both special cases of the identities (5) and (6). Actually, this better explains the development Heron-Brahmagupta-Bretschneider. Finally we wonder how many other interesting implications the identities (5) and (6) could have. What other research project could they inspire? For example, shall it be possible to obtain analogous identities in spherical or hyperbolic geometry?[2]If so, how would they relate to other well-known identities in such geometries? We leave the reader with these intriguing questions in mind.

References

[1] R. C. Alperin, Heron's Area Formula, *The College Mathematics Journal* **18(2)** 137–138.

[2] G.A. Bajgonakova and A. Mednykh, On Bretschneider's formula for a spherical quadrilateral, *Matematicheskie Zametki YAGU* **1** (2012).

[3] G.A. Bajgonakova and A.Mednykh, On Bretschneider's formula for a hyperbolic quadrilateral, *Matematicheskie Zametki YAGU* **1** (2012).

[4] J. P. Ballantine, Note on Hero's formula, *Amer. Math. Monthly* **61** (1945) 337.

[5] C. A. Bretschneider, Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes, *Archiv der Mathl* **2** (1842) 225–261.

[6] J. Casey, A Treatise On Plane Trigonometry, 1888, pp. 185-186.

[7] J. H. Conway and Peter Doyle, Personal email communication, 15 December 1997, `https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/heron/heron.txt`

[8] J. L. Coolidge, A Historically Interesting Formula for the Area of a Quadrilateral, *Amer. Math. Monthly* **46** (1939) 345–347.

[9] E. J. García, Proofs and applications of two well-known formulae involving sine, cosine and the semiperimeter of a triangle, from GeoDom, `https://geometriadominicana.blogspot.com/2020/06/another-proof-for-two-well-known.html`

[10] A. Hess, A highway from Heron to Brahmagupta, *Forum Geometricorum* **12** (2012) 191–192.

[11] V. F. Ivanoff, Solution to Problem E1376: Bretschneider's Formula, *Amer. Math. Monthly* **67** (1960) 291–292.

[12] M. Josefsson, Calculations Concerning the Tangent Lengths and Tangency Chords of a Tangential Quadrilate, *Forum Geometricorum* **10** (2010) 119–130.

[13] M. Josefsson, The area of a bicentric quadrilateral, *Forum Geometricorum* **11** (2011) 155–164.

[2] As suggested by work by G.A. Bajgonakova and A. Mednykh [2, 3].

[14] S. H. Kung, Another elementary proof of Heron's formula, *Math. Mag.* **65** (1992) 337–338.

[15] B. M. Oliver, Heron's remarkable triangle area formula, *Mathematics Teacher* **86** (1993) 161–163.

[16] V. Panagiotis, Exercise 400, *1000 General Trigonometry Exercises* **B**.

[17] C. H. Raifaizen, A Simpler Proof of Heron's Formula, *Math. Mag.* **44 (1)** 27–28.

[18] V. Thebault, The area of a triangle as a function of the sides, *Amer. Math. Monthly* **52** (1945) 508–509.

[19] P. Yiu, Euclidean Geometry, *Florida Atlantic Univesity Lecture Notes* (1998), available at `http://math.fau.edu/Yiu/Geometry.html`

O rafinare și o extindere a Problemei MGO 115

Leonard Mihai Giugiuc [1]

În numărul 3 al RMGO, autorul propune următorul rezultat:

Fie a, b, c și d numere reale nenegative,astfel incat $a^2+b^2+c^2+d^2=2$. Atunci: $a+b+c+d-abc-abd-acd-bcd \leq 2$. Demonstrația se găseste în numarul 4 al RMGO.

În continuare vom rafina și extinde acest rezultat la n variabile, cu $n \geq 3$.

Teorema 1. *Fie $n \geq 3$ și fie numerele reale nenegative $a_1, \ldots, a_n$, astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 2$. Atunci:*

$$2 \sum_{1 \leq i<j \leq n} a_i a_j \leq \sum_{i=1}^{n} a_i + 3 \sum_{1 \leq i<j<k \leq n} a_i a_j a_k .$$

Demonstrație. Vom utiliza Principiul inducției matematice. Demonstrăm prima dată pentru $n=3$. Avem: $a_1, \ldots, a_3 \geq 0$ și $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i^2 = 2$.

Aratam: $2 \sum\limits_{1 \leq i<j \leq 3} a_i a_j \leq \sum\limits_{i=1}^{3} a_i + 3a_1a_2a_3 \Longleftrightarrow \left(2 \sum\limits_{1 \leq i<j \leq 3} a_i a_j\right) \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{3} a_i^2}$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)\left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{3} a_i^2\right) + 3a_1a_2a_3. \tag{1}$$

Vom arăta că (1) este validă pentru toate numerele reale $a_1, \ldots, a_3 \geq 0$.

Este suficient să studiem două cazuri:

Cazul 1. $a_1 = a_2 = 1$ și $a_3 = x \in [0,1]$, și Cazul 2. $a_3 = 0$.

În primul caz avem de arătat că $2(2x+1)\sqrt{2(x^2+2)} \leq x^3+2x^2+8x+4, (\forall)\, x \in [0,1] \Leftrightarrow x^2(x^4+4x^3-12x^2+8x+8) \geq 0$, ceea ce este evident adevărat, $(\forall)$ $x \in [0,1]$. În cel de-al doilea caz aratăm că $(2a_1a_2)\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{2} a_i^2} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{2} a_i\right)\left(\frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{2} a_i^2\right)$, sau $2a_1a_2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{2} a_i\right)\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{2} a_i^2}$, ceea ce este evident adevarăt din AM-GM.

Fie acum $n \geq 4$ fixat. Presupunem ca pentru orice $a_1, \ldots, a_{n-1} \geq 0$, astfel incat $\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 2$ are loc $2 \sum\limits_{1 \leq i<j \leq n-1} a_i a_j \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + 3 \sum\limits_{1 \leq i<j<k \leq n-1} a_i a_j a_k$ și arătăm că pentru orice $a_1, \ldots, a_n \geq 0$,

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Traian”, Drobeta Turnu Severin, leonardgiugiuc@yahoo.com

astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 2$ are loc

$$2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \le \sum_{i=1}^{n} a_i + 3 \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k. \tag{2}$$

Reamintim formula lui Newton:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^3 - 3 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \right) + 3 \cdot \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k.$$

Astfel, dacă fixăm $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ și $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ (deci $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_i a_j$ este de asemenea fixat) atunci $\sum\limits_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k$ este minimal dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3$ este minimal.

Putem presupune că $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$.

Conform Cirtoaje EV Theorem, Corollary 1.4 pentru funcția $f(u) := u^3$ pe $(0, \infty)$, dacă fixăm $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ și $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3$ e minimal ori în $a_n = 0$, ori în $0 < a_n \le a_{n-1} = \ldots = a_1$. Deci $\sum\limits_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k$ e minimal ori în $a_n = 0$, ori în $0 < a_n \le a_{n-1} = \ldots = a_1$.

Vom lua două cazuri:

Cazul 1. $a_n = 0$.

Cazul 2. $a_1 = \ldots = a_{n-1} \ge a_n > 0$.

În Cazul 1. avem de demonstrat că $2 \sum\limits_{1 \le i < j \le n-1} a_i a_j \le \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + 3 \sum\limits_{1 \le i < j < k \le n-1} a_i a_j a_k$, ceea ce este evident adevărat din ipoteza de inducție.

În Cazul 2. rezolvăm mai întâi sistemul $\begin{cases} (n-1)\,x + y = s \\ (n-1)\,x^2 + y^2 = 2 \\ 0 < y \le x \end{cases}$, unde s urmează să fie determinat.

Menționăm că, din Jensen, $\left(\frac{s}{n}\right)^2 \le \frac{2}{n} \Rightarrow s \le \sqrt{2n}$.

Obținem $x = \frac{(n-1)s + \sqrt{(n-1)(2n-s^2)}}{n(n-1)}$ și $y = s - \frac{(n-1)s + \sqrt{(n-1)(2n-s^2)}}{n}$.

Clar, $x \ge y$. Cum $y > 0$, atunci $s > \sqrt{2\,(n-1)}$.

Să remarcăm că funcția $g : \left[\sqrt{\frac{2}{n}}, \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) \to \left(\sqrt{2\,(n-1)}, \sqrt{2n}\right]$, $g(x) = (n-1)\,x + \sqrt{2 - (n-1)\,x^2}$ este bijectivă. Așadar, dacă fixăm $s = (n-1)\,x + \sqrt{2 - (n-1)\,x^2}$, atunci în virtutea celor de mai sus $\sum\limits_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k$ e minimal in $\left(x, \ldots, x, \sqrt{2 - (n-1)\,x^2}\right)$.

Deci pentru a demonstra (2), e suficient să înlocuim $(a_1, \ldots, a_n)$ cu $\left(x, \ldots, x, \sqrt{2 - (n-1)\,x^2}\right)$. Obținem:

$$0 \le (n-1)\,x \left[(n-2)(n-3)\,x^2 - 2\,(n-2)\,x + 2\right] +$$

$$\left[3\,(n-1)(n-2)\,x^2 - 4\,(n-1)\,x + 2\right] \sqrt{2 - (n-1)\,x^2}.$$

Cum $n \geq 4$ atunci discriminanții pătraticelor $(n-2)(n-3)x^2 - 2(n-2)x + 2$ și $3(n-1)(n-2)x^2 - 4(n-1)x + 2$ nu sunt pozitivi, deci ultima inegalitate este adevărată. Demonstrația Teoremei 1 este completă. □

Teorema 2. *(extinderea MGO 115) Fie $n \geq 3$ și fie numerele reale nenegative $a_1, \ldots, a_n$, astfel încât $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2$. Atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k \leq 2$.*

Demonstrație. Conform Teoremei 1, $\sum_{i=1}^{n} a_i + 3 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \geq 0$. Pentru a demonstra Teorema 2, este suficient să arăt că

$$6 + 3 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k - 3 \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + 3 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \tag{3}$$

este echivalentă cu $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} a_i + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - 2\right)^2 \geq 0$, ceea ce este evident adevărat. Demonstrația Teoremei 2 este completă. □

Bibliografie

[1] http://rmgo.upit.ro/RMGO3/index.html#p=27

[2] http://rmgo.upit.ro/RMGO4/index.html#p=24

[3] https://www.emis.de/journals/JIPAM/images/059_06_JIPAM/059_06.pdf

Proof for AM-GM inequality using calculus tehniques

Dorin Mărghidanu[1]

There are many proofs for the well known inequality between *arithmetic mean* and *geometric mean*, or *Cauchy's inequality*. See [1] and the more extensive bibliography contained therein.

In this paper we shall give a new one. For this, we will give two preliminaries calculus results.

Although the first result is known, we recall it - as a basis for the next.

Lemma 1. *For $x > 1$, holds the following inequality, $e^{1-\frac{1}{x}} < x < e^{x-1}$.*

Proof. We consider the function $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = \ln x$ and apply *Lagrange's theorem* on the interval $[1, x] \subset [1, \infty)$. There is $c \in (1, x)$ so that $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{1}{c}$.

Since $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{c} < 1$, it comes $\dfrac{1}{x} < \dfrac{\ln x}{x-1} < 1$, thus $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x-1$.

By exponentiation we get indeed the inequality stated earlier.

An inequality - interesting in itself - is stated in. $\square$

Lemma 2. *For $0 < a \leq b$, occurs the following $e^{\frac{b-a}{b}} \leq \dfrac{b}{a} \leq e^{\frac{b-a}{a}}$.*

Proof. For $a = b$, we have obviously an equality. Supposing that $b > a$, then with $x = \dfrac{a}{b} > 1$ in Lemma 1, it comes immediately the double inequality in Lemma 2. $\square$

Theorem 1. *(Cauchy's inequality or AM-GM inequality.) If $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ and $A := \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $G := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, then $A \geq G$, with equality if and only if $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

Proof. For $h \in \mathbb{N}^*$, we note: $P_h := x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_h$, $S_h := x_1 + x_2 + \ldots + x_h$; thus $A = \dfrac{S_n}{n}$, $G := \sqrt[n]{P_n}$. Without restricting the generality, we suppose that $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Since $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq G \leq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ results that exist $k \in \mathbb{N}^*$ so that

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq G \leq x_{k+1} \leq \ldots \leq x_n \tag{1}$$

By it's very name – of (geometric) *mean*, G justifies it's intermediate position!). With (1) and the left inequality in Lemma 2, we have:

$$x_1 \leq G \to e^{\frac{G-x_1}{G}} \leq \frac{G}{x_1} \tag{2_1}$$

$$x_2 \leq G \to e^{\frac{G-x_2}{G}} \leq \frac{G}{x_2} \tag{2_2}$$

$$\vdots$$

$$x_k \leq G \to e^{\frac{G-x_k}{G}} \leq \frac{G}{x_k} \tag{2_k}$$

[1]Profesor dr., Colegiul Național ,,Al. I. Cuza", Corabia, d.marghidanu@gmail.com

relations which, - by multiplying part by part, lead to:

$$e^{\frac{(G-x_1)+(G-x_2)+\ldots+(G-x_k)}{G}} \le \frac{G^k}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \Leftrightarrow e^{\frac{kG-S_k}{G}} \le \frac{G^k}{P_k}. \tag{2}$$

From (1) and the right inequality in Lemma 2, we obtain:

$$G \le x_{k+1} \to \frac{x_{k+1}}{G} \le e^{\frac{x_{k+1}-G}{G}} \tag{3_1}$$

$$G \le x_{k+2} \to \frac{x_{k+2}}{G} \le e^{\frac{x_{k+2}-G}{G}} \tag{3_2}$$

$$\vdots$$

$$G \le x_n \to \frac{x_n}{G} \le e^{\frac{x_n-G}{G}} \tag{3_{n-k}}$$

relations which - by multiplying part by part, turn to:

$$\frac{x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_n}{G^{n-k}} \le e^{\frac{(x_{k+1}+\ldots+x_n)-(n-k)\cdot G}{G}}. \tag{3}$$

But, $\dfrac{x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_n}{G^{n-k}} = \dfrac{x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_n}{\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\right)^{n-k}} =$

$$= \frac{x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_n}{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1-\frac{k}{n}}} = \frac{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{k}{n}} \cdot (x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_n)}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} =$$

$$= \frac{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{k}{n}}}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k} = \frac{G^k}{P_k}, \tag{4}$$

So (3) can be restated as:

$$\frac{G^k}{P_k} \le e^{\frac{(x_{k+1}+\ldots+x_n)-(n-k)\cdot G}{G}}. \tag{5}$$

From (2) and (5) by transitivity, it results:

$$k \cdot G - S_k \le (x_{k+1} + \ldots + x_n) - (n-k) \cdot G \Leftrightarrow k \cdot G + (n-k) \cdot G \le S_k + (x_{k+1} + \ldots + x_n)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot G \le S_n \Leftrightarrow G \le A.$$

□

The equality is obtained when we have equality everywhere in (1) so when $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

References

[1] D. Mărghidanu *O demonstraţie inductivă a Inegalităţii mediilor*, RMGO, Anul IV , nr. 1, 2020, pp. 33-35, *on-line,* `http://rmgo.upit.ro/RMGO4/index.html#p=32.`

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Interpretarea formulelor logice

Doru Constantin [1]

În acest articol se precizează modul de realizare a interpretaărilor formulelor logice atât în limbajul de calcul cu propoziții logice elementare, cât și în limbajul extins prin includerea de simboluri non-logice. În procesul de realizare a interpretărilor logice se utilizează o serie de reguli de transformare echivalentă a formulelor logice care permit stabilirea valorilor de adevăr într-o formă simplificată și mai adecvată privind evaluarea logică. De asemenea, regulile aplicate atât în limbajul de calcul cu propoziții logice elementare, cât și în limbajul extins prin includerea de simboluri non-logice sunt utile în aplicații informatice de pregătire a datelor de intrare pentru o serie de algoritmi ce referă verificarea validabilității formulelor logice sau proceduri de unificare la nivelul unei mulțimi de expresii logice în limbajul extins.

1 Interpretarea formulelor logice în limbajul de calcul cu propoziții logice elementare

Pentru reprezentarea elementelor dintr-un limbaj de calcul cu propoziții logice se utilizează un vocabular asociat limbajului de forma $V \cup L \cup S$, unde:

* V este mulțimea propozițiilor elementare; $V \neq \emptyset$. Se poate conveni utilizarea literelor din alfabetul latin sau grecesc pentru a desemna simbolurile din mulțimea V.
* $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ este mulțimea conectivelor logice utilizate în limbajul logic propozițional: conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență și negație;
* $S = \{(,)\}$ este mulțimea simbolurilor de punctuație.

Se consideră îndeplinite condițiile $V \cap L = \emptyset$, $V \cap S = \emptyset$. Elementele generate pe baza elementelor definite în vocabularul V sunt denumite asamblaje și reprezintă elementele mulțimii $A = (V \cup L \cup S)^*$.

Structurile simbolice de interes în calculul cu propozițiile logice sunt formulele logice, iar mulțimea de formule logice este notată prin $FORM$.

1.1 Definirea conectivelor logice și a formulelor logice în calculul cu propoziții logice

Se consideră mulțimea $\{T, F\}$, elementele ei având semnificațiile $T = adevărat$, respectiv $F = fals$.

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, doru.constantin@upit.ro

Pe mulțimea $\{T, F\}$ se definesc operațiile logice:

$$\begin{aligned}
\neg : \{T,F\} &\to \{T,F\} \ \ \text{(negație logică)} \\
\wedge : \{T,F\}^2 &\to \{T,F\} \ \ \text{(conjuncție logică)} \\
\vee : \{T,F\}^2 &\to \{T,F\} \ \ \text{(disjuncție logică)} \\
\to : \{T,F\}^2 &\to \{T,F\} \ \ \text{(implicație logică)} \\
\leftrightarrow : \{T,F\}^2 &\to \{T,F\} \ \ \text{(echivalență logică)}
\end{aligned}$$

prin tabelele de definire a valorilor de adevăr:

$\neg$	T	F
	F	T

$\wedge$	T	F
T	T	F
F	F	F

$\vee$	T	F
T	T	T
F	T	F

$\to$	T	F
T	T	F
F	T	T

$\leftrightarrow$	T	F
T	T	F
F	F	T

O modalitate de descrierea a regulilor de bună formare pentru structurile simbolice din mulțimea $FORM$ este bazată pe noțiunea de SGF (**S**ecvență **G**enerativă **F**ormule).

Definiția 1. *Secvența de asamblaje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este* SGF, *dacă pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, este îndeplinită una dintre condițiile:*

(i) $\alpha_i \in V$,
(ii) există $j, 1 \leq j < i$ astfel încât $\alpha_i = (\neg\alpha_j)$,
(iii) există j, k, $1 \leq j, k < i$ și există $\rho \in L \setminus \{\neg\}$ astfel încât $\alpha_i = (\alpha_j \rho \alpha_k)$.

Observația 1. Fie α un asamblaj. Atunci, există $n \geq 1$ și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – SGF astfel încât $\alpha_n = \alpha$ dacă și numai dacă $\alpha \in FORM$.

Exemplul 1. Pentru formula

$$\alpha = ((\neg\,((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b)))\,,$$

putem construi următorul SGF:

$$a, b, (\neg a)\,, (\neg b)\,, (a \wedge (\neg b))\,, ((\neg a) \vee b)\,, (\neg\,((\neg a) \vee b))\,,((\neg\,((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b))) = \alpha.$$

Observația 2. (i) Dacă $\alpha \in V$ atunci secvența α este SGF, deci $V \subset FORM$;

(ii) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este SGF, atunci pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ este SGF. Cu alte cuvinte, toate componentele unui SGF sunt formule logice;

(iii) Delimitarea rezultată prin utilizarea parantezelor pentru structurile simbolice din $FORM \setminus V$ permite identificarea conectivei principale corespunzătoare fiecărei formule care nu este propoziție elementară. Într-adevăr, orice formulă $\alpha \in FORM \setminus V$ se încadrează pe un singur șablon dintre $\alpha = (\neg\beta)$ sau $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ cu $\rho \in L \setminus \{\neg\}$. Dacă $\alpha = (\neg\beta)$ atunci conectiva principală a formulei α este "$\neg$" și, respectiv, dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ atunci α are conectiva principală "ρ".

1.2 Definirea și aplicarea funcției de interpretare în limbajul de calcul cu propoziții logice

Pentru interpretarea elementelor de bază din vocabularul limbajului se consideră o *funcție de adevăr* care reprezintă orice funcție $h : V \to \{T, F\}$.

Definiția 2. *Pentru h o funcție de adevăr se definește funcția*

$$I(h) : FORM \rightarrow \{T, F\}$$

astfel încât să fie îndeplinite următoarele cerințe:

1. *pentru orice $\alpha \in V$, $I(h)(\alpha) = h(\alpha)$;*
2. *pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,*
   (a) $I(h)((\neg\alpha)) = \neg I(h)(\alpha)$;
   (b) $I(h)((\alpha \wedge \beta)) = I(h)(\alpha) \wedge I(h)(\beta)$;
   (c) $I(h)((\alpha \vee \beta)) = I(h)(\alpha) \vee I(h)(\beta)$;
   (d) $I(h)((\alpha \rightarrow \beta)) = I(h)(\alpha) \rightarrow I(h)(\beta)$;
   (e) $I(h)((\alpha \leftrightarrow \beta)) = I(h)(\alpha) \leftrightarrow I(h)(\beta)$.

Lema 1 (Reguli de interpretare a formulelor logice)**.** *Pentru stabilirea rezultatelor funcției de interpretare se pot utiliza o serie de reguli de exprimare în formă echivalentă a formulelor logice în funcție de șablonul pe care se încadrează o anumită formulă logică (pentru orice trei $\alpha, \beta, \gamma \in FORM$):*

1. $(\alpha \vee \neg\alpha) \equiv T$, $(\alpha \vee T) \equiv T$, $(\alpha \vee F) \equiv \alpha$, $(\alpha \wedge \neg\alpha) \equiv F$, $(\alpha \wedge F) \equiv F$, $(\alpha \wedge T) \equiv \alpha$, $(\alpha \vee \alpha) \equiv \alpha$, $(\alpha \wedge \alpha) \equiv \alpha$;
2. $(\neg(\neg\alpha)) \equiv \alpha$;
3. $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)\,,\ (\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))\,;$
4. $(\neg(\alpha \wedge \beta)) \equiv ((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))\,,\ (\neg(\alpha \vee \beta)) \equiv ((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))\,;$
5. $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))\,,\ (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))\,;$
6. $(\alpha \vee \beta) \equiv ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)\,,\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta)))\,.$

Exemple de aplicare pentru funcția de interpretare

Pentru aplicarea regulilor de interpretare se consideră cazul evaluării axiomelor definite la nivelul la nivelul propozițiilor logice din limbajul de calcul cu propoziții logice elementare din mulțimea de axiome: $AXIOM = \{\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_9\}$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in FORM$.

1. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_1$:

$$\begin{aligned} I(\overline{\alpha}_1\sigma) &= I((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))) = I(\alpha) \rightarrow (I(\beta) \rightarrow I(\alpha)) = \\ &= \neg I(\alpha) \vee \neg I(\beta) \vee I(\alpha) = T. \end{aligned}$$

2. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_2$:

$$\begin{aligned} I(\overline{\alpha}_2\sigma) &= I(((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) = \\ &= \neg I((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) \vee I(\alpha \rightarrow \beta) = \\ &= \neg(\neg I(\alpha) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\beta)) \vee (\neg I(\alpha) \vee I(\beta)) = \\ &= \neg(\neg I(\alpha) \vee I(\beta)) \vee (\neg I(\alpha) \vee I(\beta)) = \\ &= (I(\alpha) \wedge \neg I(\beta)) \vee (\neg I(\alpha) \vee I(\beta)) = \\ &= (I(\alpha) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\beta)) \wedge (\neg I(\beta) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\beta)) = T. \end{aligned}$$

3. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_3$:

$$\begin{aligned}
I(\overline{\alpha}_3\sigma) &= I(((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))) = \\
&= \neg I((\alpha \rightarrow \beta)) \vee (\neg I((\beta \rightarrow \gamma)) \vee I((\alpha \rightarrow \gamma))) = \\
&= \neg(\neg I(\alpha) \vee I(\beta)) \vee (\neg(\neg I(\beta) \vee I(\gamma)) \vee (\neg I(\alpha) \vee I(\gamma))) = \\
&= (I(\alpha) \wedge \neg I(\beta)) \vee ((I(\beta) \wedge \neg I(\gamma)) \vee (\neg I(\alpha) \vee I(\gamma))) = \\
&= (I(\alpha) \wedge \neg I(\beta)) \vee \\
&((I(\beta) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\gamma)) \wedge (\neg I(\gamma) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\gamma))) = \\
&= (I(\alpha) \wedge \neg I(\beta)) \vee ((I(\beta) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\gamma)) \wedge T) = \\
&= (I(\alpha) \wedge \neg I(\beta)) \vee (I(\beta) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\gamma)) = \\
&= (I(\alpha) \vee I(\beta) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\gamma)) \wedge \\
&(\neg I(\beta) \vee I(\beta) \vee \neg I(\alpha) \vee I(\gamma)) = \\
&= T \wedge T = T.
\end{aligned}$$

4. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_4$:

$$\begin{aligned}
I(\overline{\alpha}_4\sigma) &= I(((\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) = \\
&= \neg I((\alpha \leftrightarrow \beta)) \vee I((\alpha \rightarrow \beta)) = \\
&\neg(I((\alpha \rightarrow \beta)) \wedge I((\beta \rightarrow \alpha))) \vee I((\alpha \rightarrow \beta)) = \\
&= \neg I((\alpha \rightarrow \beta)) \vee \neg I((\beta \rightarrow \alpha)) \vee I((\alpha \rightarrow \beta)) = T.
\end{aligned}$$

5. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_5$:

$$\begin{aligned}
I(\overline{\alpha}_5\sigma) &= I(((\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))) = \\
&= \neg I((\alpha \leftrightarrow \beta)) \vee I((\beta \rightarrow \alpha)) = \\
&\neg(I((\alpha \rightarrow \beta)) \wedge I((\beta \rightarrow \alpha))) \vee I((\beta \rightarrow \alpha)) = \\
&= \neg I((\alpha \rightarrow \beta)) \vee \neg I((\beta \rightarrow \alpha)) \vee I((\beta \rightarrow \alpha)) = T.
\end{aligned}$$

6. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_6$:

$$\begin{aligned}
I(\overline{\alpha}_6\sigma) &= I(((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)))) = \\
&= \neg I((\alpha \rightarrow \beta)) \vee (\neg I((\beta \rightarrow \alpha)) \vee I((\alpha \leftrightarrow \beta))) = \\
&= \neg I((\alpha \rightarrow \beta)) \vee (\neg I((\beta \rightarrow \alpha)) \vee (I((\alpha \rightarrow \beta)) \wedge I((\beta \rightarrow \alpha)))) = \\
&= \neg I((\alpha \rightarrow \beta)) \vee \\
&((\neg I((\beta \rightarrow \alpha)) \vee I((\alpha \rightarrow \beta))) \wedge (\neg I((\beta \rightarrow \alpha)) \vee I((\beta \rightarrow \alpha)))) = \\
&= \neg I((\alpha \rightarrow \beta)) \vee ((\neg I((\beta \rightarrow \alpha)) \vee I((\alpha \rightarrow \beta))) \wedge T) = \\
&= \neg I((\alpha \rightarrow \beta)) \vee (\neg I((\beta \rightarrow \alpha)) \vee I((\alpha \rightarrow \beta))) = T.
\end{aligned}$$

7. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_7$:

$$\begin{aligned}
I(\overline{\alpha}_7\sigma) &= I((((\neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta)) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))) = \\
&= \neg I(((\neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta))) \vee I((\beta \rightarrow \alpha)) = \\
&= \neg(\neg I((\neg\alpha)) \vee I((\neg\beta))) \vee (\neg I(\beta) \vee I(\alpha)) = \\
&= \neg(I(\alpha) \vee \neg I(\beta)) \vee (\neg I(\beta) \vee I(\alpha)) = \\
&= (\neg I(\alpha) \wedge I(\beta)) \vee (\neg I(\beta) \vee I(\alpha)) = \\
&= (\neg I(\alpha) \vee \neg I(\beta) \vee I(\alpha)) \wedge (I(\beta) \vee \neg I(\beta) \vee I(\alpha)) = T \wedge T = T.
\end{aligned}$$

8. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_8$:

$$\begin{aligned}
I(\overline{\alpha}_8\sigma) &= I(((\alpha\vee\beta)\leftrightarrow((\neg\alpha)\rightarrow\beta))) = \\
&= I(((\alpha\vee\beta)\rightarrow((\neg\alpha)\rightarrow\beta))) \\
&\wedge I((((\neg\alpha)\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\vee\beta))) = \\
&= (\neg I((\alpha\vee\beta))\vee I(((\neg\alpha)\rightarrow\beta))) \\
&\wedge(\neg I(((\neg\alpha)\rightarrow\beta))\vee I((\alpha\vee\beta))) = \\
&= (\neg I((\alpha\vee\beta))\vee(\neg I((\neg\alpha))\vee I(\beta)))\wedge \\
&(\neg(\neg I((\neg\alpha))\vee I(\beta))\vee I((\alpha\vee\beta))) = \\
&= (\neg I((\alpha\vee\beta))\vee(I(\alpha)\vee I(\beta)))\wedge(\neg(I(\alpha)\vee I(\beta))\vee I((\alpha\vee\beta))) \\
&= (\neg I((\alpha\vee\beta))\vee I((\alpha\vee\beta)))\wedge(\neg I((\alpha\vee\beta))\vee I((\alpha\vee\beta))) = T.
\end{aligned}$$

9. Interpretarea pentru axioma $\overline{\alpha}_9$:

$$\begin{aligned}
I(\overline{\alpha}_9\sigma) &= I(((\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\neg((\neg\alpha)\vee(\neg\beta))))) \\
&= I(((\alpha\wedge\beta)\rightarrow(\neg((\neg\alpha)\vee(\neg\beta)))))\wedge \\
&I(((\neg((\neg\alpha)\vee(\neg\beta)))\rightarrow(\alpha\wedge\beta))) \\
&= (\neg I((\alpha\wedge\beta))\vee I((\neg((\neg\alpha)\vee(\neg\beta)))))\wedge(\neg I((\neg((\neg\alpha)\vee(\neg\beta))))) \\
&\vee I((\alpha\wedge\beta)) \\
&= (\neg I((\alpha\wedge\beta))\vee\neg(I((\neg\alpha))\vee I((\neg\beta)))) \\
&\wedge((I((\neg\alpha))\vee I((\neg\beta)))\vee I((\alpha\wedge\beta))) \\
&= (\neg I((\alpha\wedge\beta))\vee\neg(\neg I(\alpha)\vee\neg I(\beta)))\wedge((\neg I(\alpha)\vee\neg I(\beta))) \\
&\vee I((\alpha\wedge\beta)) \\
&= (\neg I((\alpha\wedge\beta))\vee\neg\neg(I(\alpha)\wedge I(\beta)))\wedge(\neg(I(\alpha)\wedge I(\beta))) \\
&\vee I((\alpha\wedge\beta)) \\
&= (\neg I((\alpha\wedge\beta))\vee I((\alpha\wedge\beta)))\wedge(\neg I((\alpha\wedge\beta))\vee I((\alpha\wedge\beta))) = \\
&T\wedge T = T.
\end{aligned}$$

2 Interpretarea formulelor logice de tip termeni și atomi în limbajul logic extins

2.1 Definirea limbajului logic extins

Limbajul de calcul cu propoziții logice elementare se poate extinde pentru a reprezenta expresii logice cu o structură mai complexă prin includerea de noi elemente la nivelul vocabularului limbajului. Astfel, vocabularul $\overline{\mathcal{V}}$ al unui limbaj logic extins va conţine două tipuri de simboluri şi anume simboluri logice şi simboluri non-logice. Spre deosebire de simbolurile logice, care sunt comune cu limbajul de calcul cu propoziții logice elementare, simbolurile non-logice sunt definite în funcţie de interpretarea intenţionată pentru limbajul respectiv. Definirea mulţimilor de simboluri non-logice pentru construirea unui limbaj logic extins aferent unui sistem de cunoştinţe dat se numeşte conceptualizare a sistemului respectiv.

Simbolurile logice sunt elementele mulţimii $V\cup L\cup S\cup Q$, unde:

* V este mulţimea variabilelor; $V\neq\emptyset$.
* $L=\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\urcorner\}$ este mulţimea conectivelor logice: conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă şi negaţie.
* $S=\{(,)\}$ este mulţimea simbolurilor de punctuaţie.

* $Q = \{\forall, \exists\}$ este mulţimea cuantificatorilor; simbolul $\forall$ este cuantificatorul universal, respectiv simbolul $\exists$ este cuantificatorul existenţial.

Simbolurile non-logice sunt elementele mulţimii $CS \cup FS \cup PS$ unde:

* CS este mulţimea constantelor.
* FS este mulţimea simbolurilor functoriale. Fiecare functor $f \in FS$ este caracterizat de un număr natural $r(f) \geq 1$ numit aritatea functorului f. (un functor are interpretarea semantică de funcție și atunci aritatea reprezintă numărul de argumente acceptat de funcția respectivă).
* PS este mulţimea simbolurilor predicaţionale. Fiecare predicat $\pi \in PS$ este caracterizat de un număr natural $r(\pi) \geq 0$ numit aritatea predicatului π.

Presupunând că mulţimile V, L, S, Q, CS, FS, PS sunt două câte două disjuncte se poate stabili vocabularul limbajului prin $\overline{\mathcal{V}} = V \cup L \cup S \cup Q \cup CS \cup FS \cup PS$. Expresiile generate pe baza vocabularului stabilit pentru limbajul extins sunt elemente ale mulţimii $A = \overline{\mathcal{V}}^*$ și se numesc asamblaje.

Într-un limbaj extins identificăm mulţimi de structuri simbolice de interes precum mulţimea termenilor $TERM$ şi mulţimea de atomi $ATOM$.

Definiția 3. *Secvenţa de asamblaje $t_1, ..., t_n$ este o secvenţă generativă termeni (SGT), dacă pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, t_i îndeplineşte una dintre următoarele condiţiile:*

ι) $t_i \in V \cup CS$

$\iota\iota$) există $f \in FS$ şi există indicii $j_1, ..., j_{r(f)}$ cu $1 \leq j_p < i$, $p = 1, ..., r(f)$ astfel încât $t_i = ft_{j_1}\ t_{j_2} ...\ t_{j_{r(f)}}$

Definiția 4. *Se numește termen orice asamblaj t cu proprietatea că există $n \geqq 1$ şi $t_1, ..., t_n-$ SGT, astfel încât $t_n = t$. Mulţimea termenilor este notată $TERM$.*

Exemplu pentru definirea termenilor în limbajul aritmeticii

Simbolurile non-logice ale limbajului standard al aritmeticii sunt: $CS = \{0\}$, $FS = \{+, *, S\}$, $PS = \left\{<, \overset{\circ}{=}\right\}$, unde $r(+) = r(*) = r(<) = r\left(\overset{\circ}{=}\right) = 2$, $r(S) = 1$. Simbolul S desemnează functorul succesor; pentru orice număr natural n, $\underbrace{SS...S}_{n}0 \triangleq n$ (*Observaţie*: În acest limbaj structurile simbolice din mulţimea $TERM$ sunt reprezentări ale expresiilor aritmetice în scriere prefixată).

Fie **asamblajul** $t = * + *SySSzSSx + xSS0$, unde $x, y, z \in V$.

Secvenţa de asamblaje: $t_1 = 0$, $t_2 = x$, $t_3 = y$, $t_4 = z$, $t_5 = Sx = St_2$, $t_6 = Sy = St_3$, $t_7 = Sz = St_4$, $t_8 = SSz = St_7$, $t_9 = SSx = St_5$, $t_{10} = *SySSz = *t_6t_8$, $t_{11} = + * SySSzSSx = +t_{10}t_9$, $t_{12} = S0$, $t_{13} = SS0 = St_{12}$, $t_{14} = +xSS0 = +t_2t_{13}$, $t_{15} = * + *SySSzSSx + xSS0 = *t_{11}t_{14} = t$ este SGT, deci $t \in TERM$.

Definiția 5. *Mulţimea expresiilor de tip atomi notată prin $ATOM$ este definită prin:*

$$\begin{aligned} ATOM \;&=\; \{\pi \mid \pi \in PS, r(\pi) = 0\} \cup \\ &\cup \left\{\pi t_1 ... t_{r(\pi)} \mid \pi \in PS, r(\pi) \geq 1,\ t_1, ..., t_{r(\pi)} \in TERM\right\}. \end{aligned}$$

2.2 Interpretarea formulelor logice de tip termeni și atomi din limbajul logic extins

Interpretarea formulelor logice de tip termeni și atomi din limbajul logic extins presupune definirea unei semantici prin care se acordă fiecărui simbol non-logic o anumită semnificaţie. Astfel, semnificaţia fiecărui functor este aceea de funcţie cu un număr de argumente egal cu aritatea functorului, semnificaţia fiecărui simbol predicaţional este aceea de predicat care exprimă o relaţie între un număr de obiecte egal cu aritatea simbolului predicațional, respectiv semnificaţia fiecărei constante este aceea de element particular din domeniul suport. Semnificaţiile acordate simbolurilor non-logice induc semnificaţii pentru structurile din mulţimile $TERM$ şi $ATOM$ și anume: de expresie funcţională pentru structurile simbolice de tipul termen, respectiv, de relaţii între expresiile funcţionale pentru predicatele din mulțimea de atomi.

Definiția 6. *Fie $\mathcal{L}$ limbajul extins stabilit anterior. Perechea (D, I) se numeşte L-structură, unde D este o mulţime nevidă numită domeniu de interpretare şi $I = (I_{CS}, I_{FS}, I_{PS})$, unde*

* $I_{CS} : CS \to D$,
* $I_{FS} : FS \to \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [D^n \to D]$, *astfel încât pentru orice* $f \in FS$, $I_{FS}(f) : D^{r(f)} \to D$,
* $I_{PS} : PS \to \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [D^n \to D] \cup \{T, F\}$, *astfel încât pentru orice* $\pi \in PS$, $I_{PS}(\pi) : D^{r(\pi)} \to \{T, F\}$ *dacă* $r(\pi) \geq 1$, *respectiv* $I_{PS}(\pi) \in \{T, F\}$, *dacă* $r(\pi) = 0$.

Notația $[A \to B]$ desemnează mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea A cu valori în mulţimea B. De asemenea, convențional se notează prin $I_{CS}(a) \triangleq a^I$, $I_{FS}(f) \triangleq f^I$, $I_{PS}(\pi) \triangleq \pi^I$; unde a^I, f^I, π^I sunt interpretările constantei a, a simbolului functorial f, respectiv, a simbolului predicaţional π în L-structura $M = (D, I)$.

Fie $M = (D, I)$ o L-structură. Semnificaţia interpretării fiecărui termen $t \in TERM$, notată t^I, este aceea de rezultat al evaluării structurii termenului t conform regulilor de calcul asociate de L-structura M simbolurilor functoriale cu apariții în structura simbolică t şi a interpretărilor considerate pentru simbolurile din mulţimea de constante CS.

Pentru interpretarea variabilelor din limbajul extins în domeniul de interpretare se utilizează o funcție de asociere (valuaţie) de forma $s : V \to D$.

Definiția 7. *Fie $s \in [V \to D]$, $x \in V$, $a \in D$.*

Se notează cu $s[x := a] \in [V \to D]$ asocierea definită prin

$$y \in V, \quad s[x := a](y) = \begin{cases} s(y), & \text{dacă } y \neq x \\ a, & \text{dacă } y = x \end{cases}$$

Definiția 8. *Interpretarea pentru un termen t^I $(t^I \in [[V \to D] \to D])$ se definește pe baza L-structurii $M = (D, I)$ și a funcției de valuație $s \in [V \to D]$, prin:*

$$t^I(s) = \begin{cases} t^I, & \text{dacă } t \in CS \\ s(t), & \text{dacă } t \in V \\ f^I\left(t_1^I(s), ..., t_{r(f)}^I(s)\right), & \text{dacă } t = ft_1...t_{r(f)} \end{cases}$$

Exemple privind interpretarea termenilor și a atomilor în limbajul aritmeticii Se consideră $M = (D, I)$ interpretarea intenţionată pentru limbajul aritmeticii. În această L-structură domeniul de interpretare este mulţimea numerelor naturale N, interpretarea simbolului constantă 0 este numărul natural 0, regulile de calcul asociate simbolurilor functoriale $+, *$ fiind suma şi, respectiv, produsul numerelor naturale utilizate ca argumente. Interpretarea functorului succesor este funcţia care calculează succesorul argumentului în mulţimea numerelor naturale N.

Interpretările simbolurilor functoriale sunt:

$D = N$, $I_{cs}(0) = 0$,

$I_{FS}(+) = +^I : N \times N \to N$, pentru orice $n, m \in N$, $+^I(n, m) = n + m$

$I_{FS}(*) = *^I : N \times N \to N$, pentru orice $n, m \in N$, $*^I(n, m) = n \cdot m$

$I_{FS}(S) = S^I : N \to N$, pentru orice $n \in N$, $S^I(n) = n + 1$

Interpretările simbolurilor predicaţionale sunt:

$I_{PS}(<) = <^I : N \times N \to \{T, F\}$, pentru orice $n, m \in N$,

$$<^I(n, m) = \begin{cases} T, \text{ dacă } n < m \\ F, \text{ dacă } n \geq m \end{cases}$$

$I_{PS}(\doteq) = =^I : N \times N \to \{T, F\}$, pentru orice $n, m \in N$,

$$=^I(n, m) = \begin{cases} T, \text{ dacă } n = m \\ F, \text{ dacă } n \neq m \end{cases}$$

Observaţie: Definiţiile interpretărilor simbolurilor predicaţionale pot fi exprimate prin

$$\begin{array}{l} <^I(n, m) = if\ n < m\ then\ T\ else\ F \\ =^I(n, m) = if\ n = m\ then\ T\ else\ F. \end{array}$$

1. *Interpretarea termenului* $t = * + *SySSzSSx + xSS0$, cu $x, y, z \in V$ şi $s \in [V \to N]$.

Deoarece $t = *\underbrace{+ * SySSzSSx}_{t_1}\underbrace{+xSS0}_{t_2}$, avem interpretarea pentru termenul t:

$$t^I(s) = *^I\left(t_1^I(s), t_2^I(s)\right) = t_1^I(s) \cdot t_2^I(s).$$

Deoarece, $t_1 = +\underbrace{*SySSz}_{t_{11}}\underbrace{SSx}_{t_{12}}$ şi $t_2 = +\underbrace{x}_{t_{21}}\underbrace{SS0}_{t_{22}}$, rezultă:

$$\begin{aligned} t_1^I(s) &= +^I\left(t_{11}^I(s), t_{12}^I(s)\right) = t_{11}^I(s) + t_{12}^I(s), \\ t_2^I(s) &= +^I\left(t_{21}^I(s), t_{22}^I(s)\right) = t_{21}^I(s) + t_{22}^I(s) = \\ &= s(x) + S^I\left(S^I\left(0^I\right)\right) = s(x) + S^I\left(S^I(0)\right) = \\ &= s(x) + S^I(0+1) = s(x) + 0 + 1 + 1 = s(x) + 2 \end{aligned}$$

Iterând, obţinem în continuare rezultatele următoare:

$$\begin{aligned} t_{11}^I(s) &= *^I\left((Sy)^I(s), (SSz)^I(s)\right) = S^I(s(y)) \cdot S^I\left(S^I(s(z))\right) = \\ &= (s(y) + 1) \cdot (s(z) + 1 + 1) = (s(y) + 1) \cdot (s(z) + 2) \\ t_{12}^I(s) &= (SSx)^I(s) = S^I\left(S^I(s(x))\right) = (s(x) + 2) \end{aligned}$$

Rezultă:

$$t_1^I(s) = (s(y)+1)\cdot(s(z)+2) + (s(x)+2)$$

În final avem rezultatul interpretării de forma:

$$t^I(s) = ((s(y)+1)\cdot(s(z)+2) + s(x)+2)\cdot(s(x)+2).$$

În particular pentru valori asociate variabilelor utilizate prin funcția $s \in [V \to N]$, $s(x)=1$, $s(y)=5$, $s(z)=1$, se obține valoarea finală a interpretării termenului t în acest limbaj prin $t^I(s)=63$.

2. *Interpretarea intenţionată pentru structura simbolică de tip atom* $\alpha \stackrel{\circ}{=} = * + xS0 + xSS0 + + + *xx * SSS0xSS0$.

Expresia considerată se poate scrie sub forma $\alpha \stackrel{\circ}{=} \underbrace{* + xS0 + xSS0}_{t_1}\underbrace{+ + *xx * SSS0xSS0}_{t_2}$, unde $t_1, t_2 \in TERM$, deci $\alpha \in ATOM$.

Pentru funcția de asociere $s \in [V \to D]$ se obţine interpretarea formulei α prin:

$\alpha^I(s) = \stackrel{\circ}{=}^I \left(t_1^I(s), t_2^I(s)\right) = if\ t_1^I(s) = t_2^I(s)\ \ then\ T\ else\ F$

$t_1^I(s) = *^I\left((+xS0)^I(s), (+xSS0)^I(s)\right) = (s(x)+1)\cdot(s(x)+2)$

$t_2^I(s) = +^I\left((+ * xx * SSS0x)^I(s), (SS0)^I(s)\right) = +^I\left((*xx)^I(s), (*SSS0x)^I(s)\right) + 2 = s(x)\cdot s(x) + 3\cdot s(x) + 2$.

Pe baza rezultatelor de interpretare obținute se observă rezultatul final evident, $t_1^I(s) = t_2^I(s)$, pentru orice asociere s, deci interpretarea atomului inițial este $\alpha^I(s) = T$.

Concluzii

Lucrarea prezintă pe lângă elementele de bază privind interpretarea formulelor logice dintr-un limbaj de calcul cu propoziții logice și definirea limbajului extins prin utilizarea de elemente non-logice în contextul limbajului de calcul logic elementar și interpretarea structurilor simbolice de tip termeni și atomi de la nivelul limbajului extins. Prin descrierea teoretică a elementelor de interpretare logică și aplicarea unui raționament logic algoritmic de interpretare cu aplicații uzuale privind validabilitatea formulelor logice sau verificarea unificabilității expresiilor funcționale se arată utilitatea și caracterul aplicativ în diverse domenii ce referă reprezentarea cunoștințelor într-un limbaj logic.

Bibliografie

[1] J.L. Bell, M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, 1997.

[2] M. Ben-Ari, *Mathematical Logic for Computer Science*, Springer Verlag, 2001.

[3] J. Bessie, S. Glennan, *Elements of Deductive Inference: An Introduction to Symbolic Logic*, Wadsworth Publishing Company, 1999.

[4] C.M. Bishop, *Neural Network for Pattern Recognition*, Clarendon Press, 1995.

[5] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1996.

[6] A. Cichocki, R. Unbehauen, *Neural Networks for Signal Processing and Optimization*, Wiley, 1994.

[7] T.M. Cover, J.A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, 1991.

[8] K.I. Diamantaras, S.Y. Kung, *Principal Component Neural Networks: Theory and Applications*, Wiley, 1996.

[9] H.D. Ebbinghauss, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical Logic*, Springer Verlag, 1994.

[10] M. Fitting, *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*, Springer Verlag, 1996.

[11] T. Foster, *Logic, Computation and Set Theory*, CRC Press, 2002.

[12] M. Gabbay, C.J. Hogger, J.A. Robinson, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Oxford University Press, 1998.

[13] J.H. Gallier, *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*, Harper&Row, 2003.

[14] W. Gardner, *Introduction to Random Processes with Applications to Signal and Systems*, Macmillan, 1986.

[15] R. Gonzalez, P. Wintz, *Digital Image Processing*, Addison-Wisley, 1987.

[16] M. Girolami, *Self-Organising Neural Networks - Independent Component Analysis and Blind Source Separation*, Springer Verlag, 1999.

[17] A. Hyvärinen, J. Karhunen, E. Oja, *Independent Component Analysis*, John Wiley, 2001.

[18] I.T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, Springer-Verlag New York, 2002.

[19] S. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Prentince Hall, 1988.

[20] T. Kohonen, *Self-Organizing Maps*, Springer, 1995.

[21] T.W. Lee, *Independent Component Analysis - Theory and Applications*, Kluwer, 1998.

[22] Z. Manna, R. Waldinger, J. Manna, *The Logical Basis for Computer Programming: Deductive Reasoning*, Addison-Wesley, 1991.

[23] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic, Fourth Edition*, CRC Press, 1997.

[24] A. Oppenheim, R. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentince Hall, 1989.

[25] S. Russell, P. Norvig, *Artificial Intelligence. A Modern Approach*, Prentice Hall, 1995.

[26] R.M. Smullyan, *First-Order Logic*, Dover Publications, 1995.

[27] L. State, *Elemente de logica matematica și demonstrarea automata a teoremelor*, Univ. București, 1989.

[29] C. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentince Hall, 1992.

[30] L. Zhongwan, *Mathematical Logic for Computer Science*, World Scientific Pub. Co., 1998.

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI

Elemente de statistică descriptivă în limbajul de programare R

Maria-Crina Diaconu [1]

Limbajul de programare R este unul dintre cele mai avansate programe statistice. Este gratuit și are avantajul existenței unui grup de utilizatori activi care aduc îmbunătățiri, dezvoltă module noi specializate pe implementarea unor algoritmi și oferă sfaturi și asistență pe forumuri specializate. Obiectivul acestei lucrări este de a prezenta o scurtă introducere în programul R cu ajutorul interfeței grafice RStudio. O descriere detaliată a acestui program precum și versiunile disponibile pentru descărcat se găsesc pe site-ul www.r-project.org.

Statistica descriptivă are rolul de a descrie trăsăturile principale ale unor eșantioane și constă în determinarea unor măsuri simple și analize grafice ale datelor din eșantion.

Pentru a descrie o variabilă cantitativă (numerică) a unei populații statistice este necesar să identificăm câteva caracteristici ale valorilor ei numerice, fiecare dintre aceste caracteristici oferă un anumit tip de informație. Astfel:

- caracteristicile de poziție: media, mediana dau informații asupra ordinului de mărime al observațiilor statistice;
- caracteristicile de dispersie: amplitudinea, modulul, abaterea medie liniară, dispersia, abaterea medie pătratică dau informații despre gradul de împrăștiere a valorilor.

În cele ce urmează considerăm că datele din eșantion sunt: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Analiza tendinței centrale este o aproximare a ,,centrului" distribuției eșantionului. Cea mai importantă măsură a tendinței centrale este:

- *Media* - uzual media aritmetică a datelor din eșantion:

$$M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

în R: `mean(eșantion)`

Împrăștierea (sau dispersia datelor) reunește un grup de valori care măsoară împrăștierea datelor în jurul tendinței centrale.

[1] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

- *Dispersia* eșantionului (ν):

$$\nu = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - M)^2}{n}$$

- *Abaterea medie pătratică* eșantionului (σ):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - M)^2}{n}}$$

Din considerente specifice teoriei estimării parametrilor, în probleme de selecție se folosesc valorile corectate ale acestora:

- *Dispersia* eșantionului (s^2):

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - M)^2}{n-1}$$

în R: `var(eșantion)`

- *Deviația standard* a eșantionului (s)¸

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - M)^2}{n-1}}$$

în R: `sd(eșantion)`

Funcțiile disponibile în R pentru manipularea datelor sunt prea numeroase pentru a fi enumerate aici. Câteva dintre aceste funcții prezentate în [4] sunt cele din tabelul următor.

`sum(x)`	suma elementelor lui `x`
`prod(x)`	produsul elementelor lui `x`
`max(x)`	maximul elementelor lui `x`
`min(x)`	minimul elementelor lui `x`
`which.max(x)`	returneaza indexul celui mai mare element al lui `x`
`which.min(x)`	returneaza indexul celui mai mic element al lui `x`
`range(x)`	id. than `c(min(x), max(x))`
`length(x)`	numarul elementelor lui `x`
`mean(x)`	media elementelor lui `x`
`median(x)`	mediana elementelor lui `x`
`var(x)` sau `cov(x)`	dispersia elementelor lui `x` (calculata cu $n-1$); daca `x` este o matrice sau o secventa de date, matricea varianta-covarianta este calculata
`cor(x)`	matricea corelatie a lui `x` daca este o matrice sau o secventa de date (1 daca `x` este un vector)
`var(x, y)` sau `cov(x, y)`	dispersia dintre `x` si `y`, sau dintre coloanele lui `x` si ale lui `y` daca sunt matrici sau secvente de date
`cor(x, y)`	corelatie liniara intre `x` si `y`,sau matricea corelatiei daca sunt matrici sau secvente de date

Fig. 1

EXEMPLUL 1: Pentru următoarea problemă rezolvată în manualul de matematică de clasa a 11-a [2] se prezintă soluția în R.

Un antrenor trebuie să aleaga între doi sportivi pe cel care va reprezenta clubul la următorul concurs de natație. El analizează performanțele sportivilor la ultimele 8 antrenamente. Pentru a se putea decide, antrenorul va trebui să compare dispersia rezultatelor celor doi sportivi. Iată cum a procedat:

Sportiv 1	30,2	29,7	29,9	29.3	29,4	30,1	30,2	29,6
Sportiv 2	30,1	29,8	29,2	29,8	30,2	29,9	29,9	29,5

Calculând media performanțelor obținute de sportivi la cele 8 antrenamente, antrenorul constată că cei doi au obținut aceeași performanța medie.

$$M = 29,8$$

Calculând abaterile medii pătratice pentru performanțele celor doi sportivi constatată că $\sigma_2 < \sigma_1$:

$$\nu_1 = \frac{0,77}{8} \approx 0.096, \sigma_1 = \sqrt{0,096} \approx 0,310$$

$$\nu_2 = \frac{0,72}{8} = 0.09, \sigma_2 = \sqrt{0,09} \approx 0,300$$

Performanțele celui de-al doilea sportiv sunt mai puțin dispersate față de medie, deci sunt șanse ca la concurs să obțină o performanță mai apropiată de medie.

În R:

$> sample\_1 = c(30.2, 29.7, 29.9, 29.3, 29.4, 30.1, 30.2, 29.6)$
$> mean(sample\_1)$
[1]29.8
$> sd(sample\_1)$
[1]0.3545621
$> sample\_2 = c(30.1, 29.8, 29.2, 29.8, 30.2, 29.9, 29.9, 29.5)$
$> mean(sample\_2)$
[1]29.8
$> sd(sample\_2)$
[1]0.3207135

De asemenea, obținem $s_2 < s_1$.

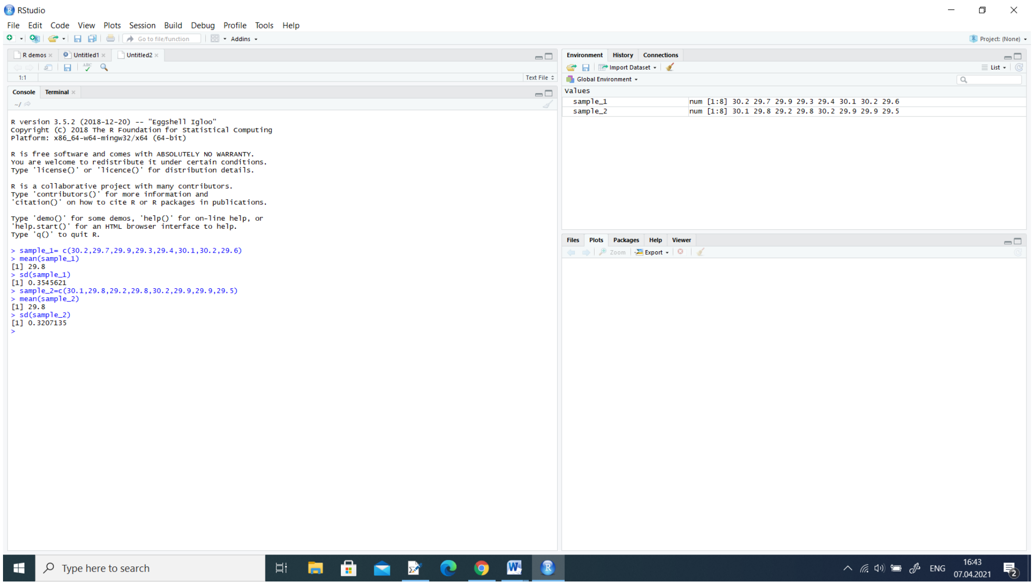


Fig. 2

Putem exprima ,,împrăștierea" rezultatelor și prin situarea acestora față de intervalul $[M-\sigma, M+\sigma]$. Pentru exemplul dat:

Sportivul 1: $[29,49; 30,11]$ - 4 dintre valori, adică 50% dintre performanțele luate în calcul sunt în afara intervalului.

Sportivul 2: $[29,5; 30,1]$ - 2 dintre valori, adică 25% dintre performanțele luate în calcul sunt în afara intervalului.

În R:

Sportivul 1:

$> sample\_1 = c(30.2, 29.7, 29.9, 29.3, 29.4, 30.1, 30.2, 29.6)$
$> m1 = mean(sample\_1)$
$> s1 = sd(sample\_1)$
$> new\_sample = vector()$
$> for(i \;\; in \;\; 1 : length(sample\_1))$
$+if(sample\_1[i] >= m1 - s1 \;\; \& \;\; sample\_1[i] <= m1 + s1)\{j = j + 1$
$+new\_sample[j] = sample\_1[i]\}$
$> new\_sample$
$[1]NA \;\; 29.7 \;\; 29.9 \;\; 30.1 \;\; 29.6$

Sportivul 2:

$> sample\_1 = c(30.1, 29.8, 29.2, 29.8, 30.2, 29.9, 29.9, 29.5)$
$> m2 = mean(sample\_2)$
$> s2 = sd(sample\_2)$
$> new\_sample = vector()$
$> for(i \;\; in \;\; 1 : length(sample\_2))$
$+if(sample\_2[i] >= m2 - s2 \;\; \& \;\; sample\_2[i] <= m2 + s2)\{j = j + 1$
$+new\_sample[j] = sample\_2[i]\}$
$> new\_sample$
$[1]NA \;\; 29.2 \;\; 30.2$

Conform unui rezultat celebru în statistică, *Inegalitatea lui Cebîșev*, într-o repartiție normală (sau apropiată de aceasta), valorile cuprinse între $M - \sigma$ și $M + \sigma$ reprezintă aproximativ 68%

din efectivul total, valorile cuprinse între $M - 2\sigma$ și $M + 2\sigma$ reprezintă aproape 95% din efectiv, iar cele cuprinse între $M - 3\sigma$ și $M + 3\sigma$ reprezintă circa 99% din efectiv.

Într-o repartiție normală poligonul efectivelor prezintă un aspect de clopot simetric în raport cu media.

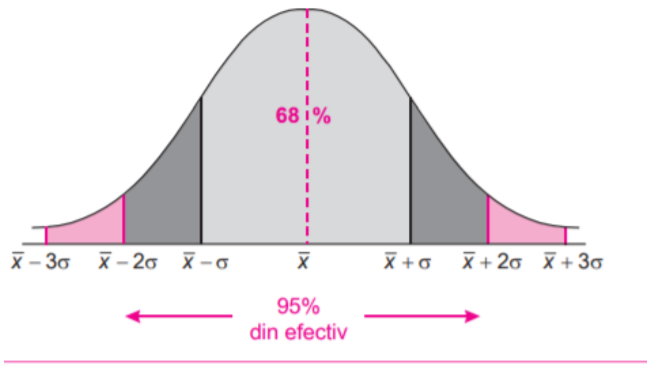


Fig. 3

EXEMPLUL 2: Pentru următoarea problemă rezolvată în manualul de matematică de clasa a 11-a [2] se prezintă soluția în R.

La concursul ,,Cangurul" au participat, în anul 2002, 170000 de elevi. Înregistrarea rezultatelor la teste se face de către un corector automat. La 100 de lucrări parcurse, corectorul a înregistrat următoarele punctaje:

Punctaj	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Efectiv	1	4	5	0	4	10	3	6	4	10	9	9	5	13	10	7

Dacă punctajele nu au fost influențate de diferiți factori exteriori, distribuția grafică a punctajelor ar trebui să capete forma repartiției normale.

- Calculăm indicatorii: media $M = 19,25$ și dispersia $\sigma \approx 4,112$.

- Evaluăm calitatea eșantionului:

Intervalul $[M - \sigma; M + \sigma]$ corespunde intervalului $[15,138; 23,362]$ - 59 de lucrări sunt situate în acest interval, ceea ce reprezintă 59% din numărul notelor.

Intervalul $[M - 2\sigma; M + 2\sigma]$ corespunde intervalului $[11,026; 23,362]$ - 82 de lucrări sunt situate în acest interval, ceea ce reprezintă 82% din numărul notelor.

În concluzie, punctajele obținute la concurs nu respectă repartiția normală. Este de presupus că unele note au fost influențate de factori externi, sau că, datorită numărului relativ mic de lucrări luate în discuție, nu putem formula concluzii pertinente.

În R: Trasăm poligonul frecvențelor pentru punctajele la cele 100 lucrări de la concurs și comparam cu desenul din Figura 3.

$> frecv = c(25, 11, 11, 11, 20, 20, 14, 16, 18, 21, 21, 21, 19, 23, 17, 24, 25, 12, 12, 15,$
$19, 19, 14, 22, 22, 24, 24, 24, 15, 17, 19, 18, 16, 20, 25, 23, 21, 22, 24, 20,$
$23, 25, 23, 15, 17, 22, 24, 20, 15, 19, 23, 25, 23, 15, 17, 19, 23, 17, 24, 25,$
$15, 15, 15, 14, 11, 18, 21, 21, 21, 19, 23, 17, 24, 20, 20, 14, 16, 18, 21, 21,$
$23, 12, 12, 10, 15, 12, 19, 19, 20, 24, 23, 23, 22, 24, 20, 15, 19, 23, 25, 23)$

$> hist(frecv)$

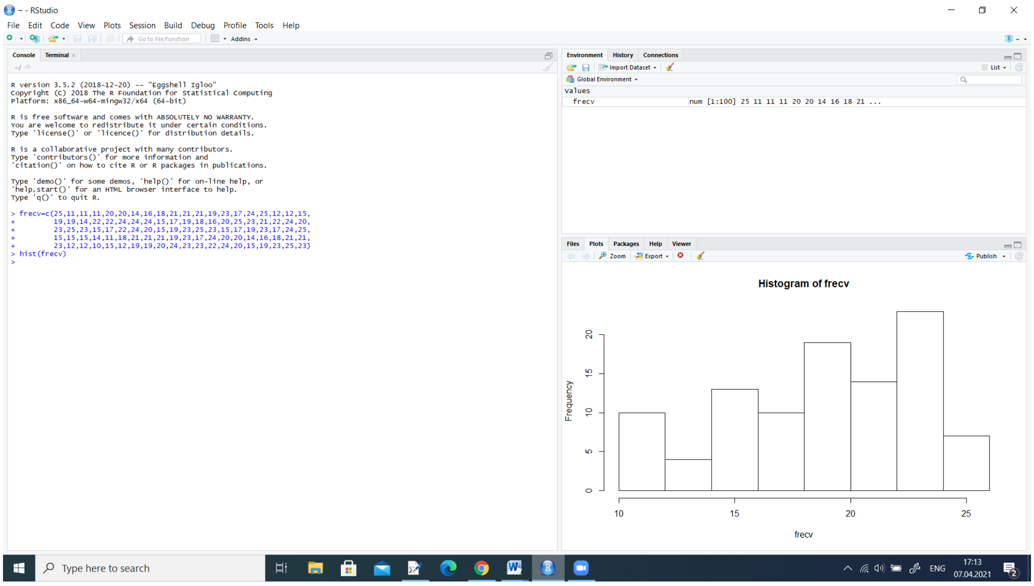


Fig. 4

De asemenea, observăm că punctajele obținute la concursul ,,Cangurul” nu respectă repartiția normală. Repartiția normală este de așteptat să apară doar la seriile statistice cu un număr mare de date.

Materialul prezentat se adresează utilizatorilor începători ai limbajului de programare R. Este important de precizat însă că programul R poate fi utilizat în mai multe domenii ale matematicii aplicate, nu numai în statistică.

Bibliografie

[1] Maria Miroiu, Viorel Petrehuș, Gheorghiță Zbăganu, *Inițiere în R*, 2013.

[2] Mihaela Singer, Cristian Voica, *Matematică M5: manual pentru clasa a XI-a*, Editura SIGMA, 2006.

[3] Olariu St. Emanuel Florentin, `https://profs.info.uaic.ro/~olariu/`.

[4] `https://cran.r-project.org/doc/contrib/Paradis-rdebuts_RO.pdf`

RUBRICA DE ROBOTICĂ

Senzorul ultrasonic pentru Minstorms EV3

Doru Anastasiu Popescu [1]

Senzorul ultrasonic EV3 (Figura 1) generează unde sonore și ascultă ecourile pentru a detecta și măsura distanțele față de obiecte. Distanțele sunt măsurate în cm cu o precizie de 1 cm pentru distanțele din intervalul [1, 250] folosind unitatea de măsură centimetri. Pentru a înțelege modul de funcționare a acestui senzor vom prezenta rezolvările câtorva probleme în Minstorms EV3.

Fig. 1: Senzorul ultrasonic

Problema 1. *Se dă o caramidă inteligentă (intelligent brick) conectată la senzorul ultrasonic prin portul 4. Se cere să se redea sunetul ,,Hello" timp de 5 secunde când apare un obiect la o distanță mai mică de 10 cm față de sonsorul ultrasonic.*

Rezolvare.

1. Rezolvarea directă a acestei probleme fără a folosi variabile care să rețină valorile furnizate de senzorul ultrasonic este prezentată în figura 2.

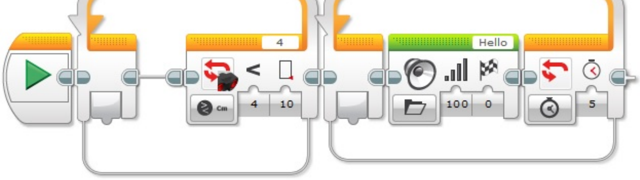


Fig. 2: Succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 1 fără variabile

2. Rezolvarea problemei folosind o variabilă pentru măsurarea distanței până la un obiect cu senzorul ultrasonic este prezentată în figura 3.

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

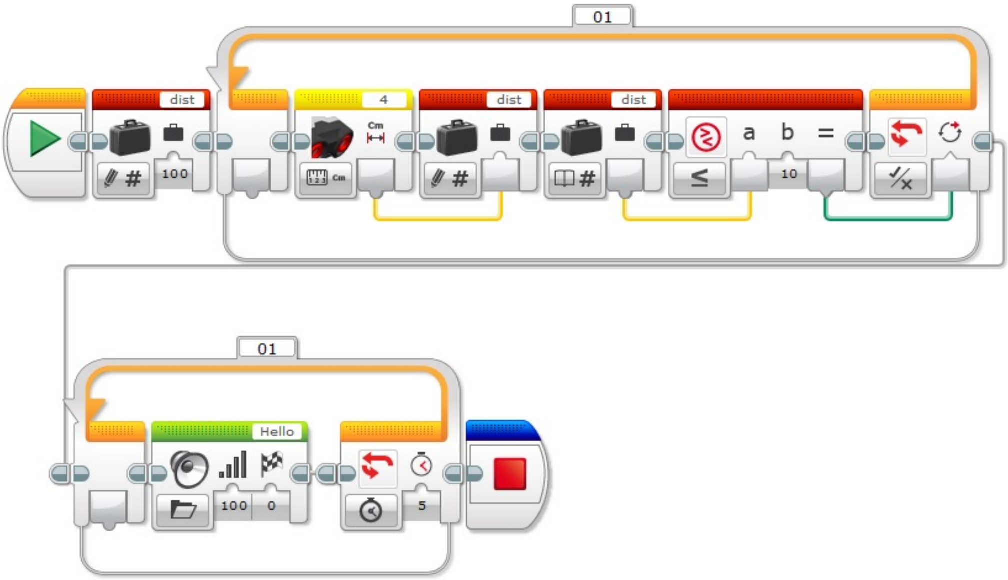


Fig. 3: Succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 1 cu variabile

Problema 2. *Vom considera că la portul 1 se află senzorul tactil, iar la portul 4 senzorul ultrasonic pentru o cărămidă inteligentă. Se cere să se pornească motoarele mari aflate la porturile B și C când senzorul tactil este apăsat și la mai puțin de 10 cm se află un obiect față de sezorul ultrasonic. Motoare vor fi pornite cu viteza 30 rotații pe o perioadă de 5 secunde.*

Rezolvare. Rezolvarea este prezentată în figura 4.

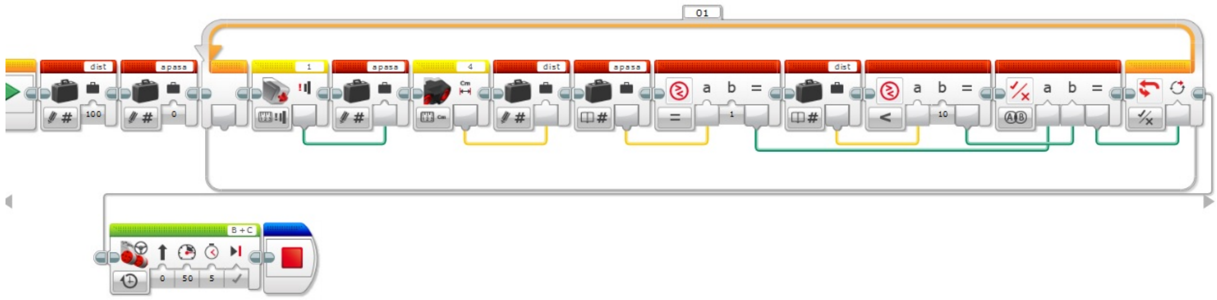


Fig. 4: Succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 2 cu variabile

Problema 3. *Deplasați un robot în linie dreaptă cu viteza 30 de rotații până când în fața lui apare un obiect la o distanță mai mica sau egală cu 20 cm, situație în care acesta se va opri si va reda pentru 5 secunde sunetul ,,Minstorms".*

Rezolvare. Rezolvarea este prezentată în figura 5.

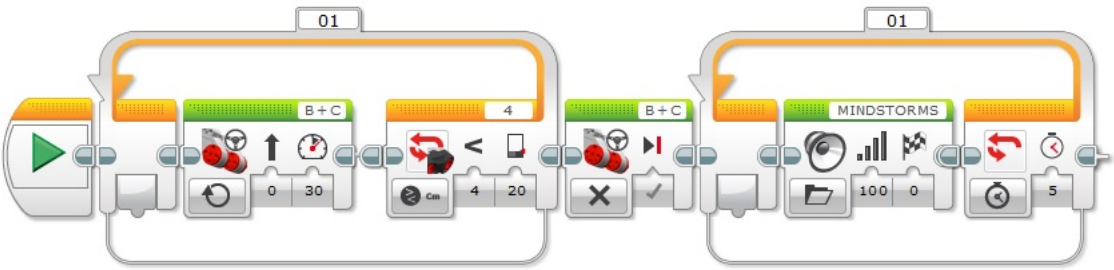


Fig. 5: Succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 3

Problema 4. *Deplasați repetat un robot astfel încât, atunci când apare la o distanță mai mică decât 20 cm un obiect să se oprească pentru 5 secunde și apoi să continue deplasarea. Toată deplasarea va dura 60 secunde.*

Rezolvare. Rezolvarea este prezentată în figura 6.

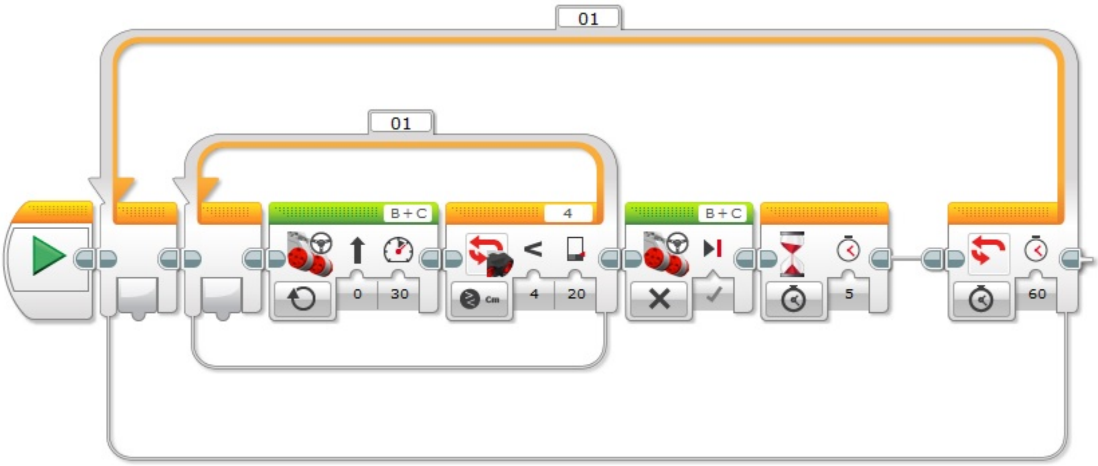


Fig. 6: Succesiunea de blocuri Minstorms EV3 pentru rezolvarea problemei 4

Probleme propuse

Pentru fiecare din problemele următoare scrieți câte un proiect folosind mediul interactiv de programare Mindstorm Evolution EV3.

1. Se dă un robot cu sensor de culoare și sensor ultrasonic. Se cere să se deplaseze pentru 30 secunde în linie dreaptă robotul, dacă culoarea detectată este roșu și de senzorul ultrasonic se află un obiect la distanța $<$ 20 cm. Viteza de deplasare va fi de 30 rotații.
2. Se dă un robot cu un sensor tactil, un sensor ultrasonic și două motoare la porturile B și C. Când este apăsat sezorul tactil va porni pentru 20 secunde motorul de la portul B, iar dacă la o distanță mai mică decat 20 cm de senzorul ultrasonic se află un obiect se va porni pentru 20 secunde motorul de la portul C.
3. Se dă o caramidă inteligentă, un sezor ultrasonic și un motor mediu. Porniți pe o perioadă de 30 secunde cu viteza de 30 rotații motorul mediu, dacă de sezorul ultrasonic s-a apropiat la o distanță mai mică strict decât 20 cm un obiect.
4. Afișați pe ecanul căramizii inteligente mesajul ,,Obiect aproape!", dacă de sonzorul ultrasonic s-a apropiat un obiect la o distanță mai mică decât 20 cm.

Bibliografie

[1] D.A. Popescu, *Programarea roboților LEGO folosind mediul Mindstorms EV3*, MATINF, nr. 1, 2018.

[2] D.A. Popescu, *Programarea roboților Lego folosind structura alternativă în mediul grafic interactiv Mindstorms Education EV3*, MATINF, nr. 2, 2018.

[3] D.A. Popescu, *Repetarea operațiilor unui robot Mindstorms Education EV3*, MATINF, nr. 5, 2020.

[4] D.A. Popescu, S. Profeanu, S. Dobrescu, *Manual de informatică pentru clasa a V-a*, Editura CD-Press, 2017.

[5] *Minsdtorms EV3 – Ghid de Utilizare*, LEGO Group, 2013.

[6] L. Negrescu, L. Negrescu, *Construirea și programarea roboților LEGO Mindstorms EV3*, Editura Albastră, 2015.

[7] J. Olayvar, E. Lindberg, *LEGO Mindstorms EV3 Programming Basics*, Washington State Library, 2016.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Costel Anghel[1] *și Florea Badea*[2]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $(-14) : 7 + 2,5$ este egal cu:

   a) 1; b) -2; c) 0,5; d) 1,5.

2. Suma divizorilor naturali ai numărului 9 este:

   a) 10; b) 13; c) 19; d) 5.

3. Dacă $3^a \cdot 27^b = 243$, atunci $a + 3b$ este:

   a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

4. 25% din 50% din 200 este:

   a) 20; b) 30; c) 40; d) 25.

5. Dacă $a + b = 8$ și $a - b = 6$, $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $a^2 - b^2$ este:

   a) 47; b) 45; c) 48; d) 49.

6. $E(x) = (2x - 3)(2x + 3) + 8$, $x \in \mathbb{R}$. Numărul pozitiv a, pentru care $E(a) = 3$ este:

   a) 2; b) 1,5; c) 3,4; d) 1.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B, D, C în această ordine. Dacă $AB = 4$ cm, $BC = 8$ cm și D este mijlocul lui (AC), atunci BD este egal cu:

   a) 1 cm; b) 3 cm; c) 2,5 cm; d) 2 cm.

2. Complementul suplementului unui unghi de $120°$, are măsura de:

   a) $50°$; b) $30°$; c) $35°$; d) $75°$.

3. Un triunghi dreptunghic isoscel, cu ipotenuza de $4\sqrt{2}$ cm, are perimetrul egal cu:

   a) $4(3+\sqrt{2})$ cm; b) 2 dm; c) $4(2+\sqrt{2})$ cm; d) 0,25 m.

4. Un romb cu diagonala mică de 10 cm și un unghi de $120°$ are aria:

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Ion Minulescu", Slatina, anghelcostel2012@yahoo.com
[2] Profesor, Şcoala Gimnazială ,,Nicolae Coculescu", Scornicești

a) $50\ \text{cm}^2$; b) $48\ \text{cm}^2$; c) $50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$; d) $60\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

5. Într-un cerc de centru O și rază $r = 20$ cm se consideră două coarde paralele, $AB = 32$ cm și $CD = 24$ cm astfel încât punctul O este în interiorul patrulaterului $ABCD$. Distanța dintre cele două coarde este:

   a) 24 cm; b) 26 cm; c) 28 cm; d) 25 cm.

6. O prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei $l = 12$ cm și $m(\sphericalangle B'AB) = 30°$. Volumul acestei prisme este:

   a) $432\ \text{cm}^3$; b) $425\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; c) $460\ \text{cm}^3$; d) $120\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră egalitatea $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{7}$.
   a) Scrieți numărul $10 + 2\sqrt{21}$ sub forma $(x + y)^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   b) Determinați perechile de numere reale, (a, b), care verifică egalitatea dată.
2. Se consideră expresia $E(x) = (4x - 3)^2 - 4(4x - 3) + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Arătați că $E(x) = 16x^2 - 40x + 25$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
   b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care $E(n) \vdots 9$.
3. În sistemul de axe ortogonale xOy, se consideră punctele A, B și C.
   a) Reprezentați punctele știind că $A(3; 4)$; $B(6; 0)$; $C(3; -4)$.
   b) Aflați perimetrul și aria patrulaterului $OABC$.
4. Fie $ABCD$ un trapez cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90°$, $AD < BC$. Punctul $E \in (AB)$ astfel încât $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BEC$. Dacă F este mijlocul lui $[EC]$ arătați că:
   a) Triunghiul BEF este echilateral.
   b) Demonstrați că dreptele BF și DE sunt paralele.
5. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 10$ cm. Ştiind că M și N sunt mijloacele muchiilor AB și BC, calculați:
   a) distanța de la D' la dreapta MN.
   b) distanța de la A la planul $(D'DM)$.
6. Piramida $VABC$ are baza triunghiul ABC dreptunghic în A, $AB = 3$ dm, $AC = 4$ dm și înălțimea $VA = 2,4$ dm.
   a) Aflați măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele (VBC) și (ABC).
   b) Dacă $AD \perp (VBC)$, $D \in (VBC)$, arătați că punctul D este ortocentrul triunghiului VBC.

Testul 2

Viorica Niță[3]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Scrierea numărului 36 ca produs de puteri de numere prime distincte este:

[3] Profesor, Şcoala Gimnazială ,,Aurel Solacolu", Ogrezeni, vyo20@yahoo.com

a) $2^2 \cdot 3^2$; b) $4 \cdot 3^2$; c) $18 \cdot 2$; d) $9 \cdot 2^2$.

2. Opusul numărului $x = 2\frac{5}{9}$ este

a) $-\frac{9}{23}$; b) $\frac{23}{9}$; c) $-\frac{23}{9}$; d) $\frac{9}{23}$.

3. Patru elevi au de determinat media aritmetică a numerelor 25; 32,6 și 18,3. Rezultatele obținute sunt înregistrate în tabelul următor:

Bianca	Edward	Teodor	Andrei
25,3	26,35	20	26

Elevul care a obținut rezultatul corect este:

a) Edward; b) Teodor; c) Andrei; d) Bianca.

4. Scrierea sub formă de interval a mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < 2\}$ este:

a) $(-2, 2)$; b) $(-3, 1)$; c) $(-2, 1)$; d) $[-2, 2]$.

5. Se dau numerele $a = 2 + \sqrt{3}$ și $b = 2 - \sqrt{3}$. Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b este:

a) 2; b) $4 + \sqrt{3}$; c) 1; d) 4.

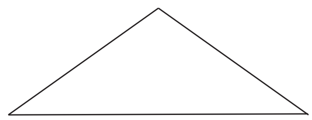
6. Ioana afirmă că în intervalul (0,1] nu există niciun număr natural. Afirmația Ioanei este:

a) adevărată; b) falsă;

SUBIECTUL al II-lea

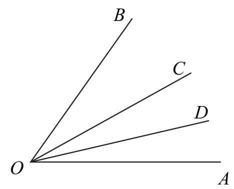
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Alexandra parcurge un traseu având forma triunghiului din figura alăturată, cu perimetrul de 1,6 km. Lungimea pasului Alexandrei este de 0,4 m. Numărul de pași pe care îi va face Alexandra este:



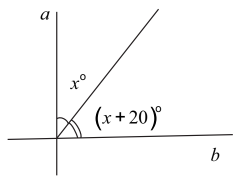
a) 2800; b) 2160; c) 4000; d) 1850.

2. În figura alăturată, semidreptele [OC și [OD sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$. Unghiul $\sphericalangle BOD$ are măsura de 45°. Măsura unghiului AOD este:



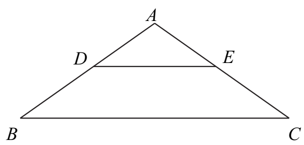
a) 30°; c) 25°;
b) 15°; d) 45°.

3. În figura alăturată, dreptele a și b sunt perpendiculare. Valoarea lui x este:



a) 35°; c) 90°;
b) 20°; d) 140°.

4. În figura alăturată, segmentul $[DE]$ este paralel cu latura BC a triunghiului $\triangle ABC$, iar $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$. Segmentul $[BC]$ are lungimea de 45 cm. Lungimea segmentului $[DE]$ este:

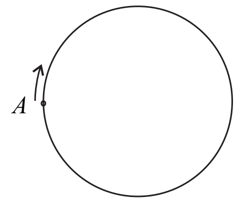


a) 6 cm; b) 18 cm; c) 22,5 cm; d) 45 cm.

5. Pentru a construi fundația unei case se sapă o groapă în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată. Adâncimea gropii este de 3 m, latura bazei mici are 3 m și latura bazei mari are 9 m. Volumul pământului excavat este egal cu:

   a) 117 m^3; b) 320 m^3; c) 285 m^3; d) 120 m^3.

6. Un lac circular are suprafața de 144 π m^2. Bianca pleacă din punctul A, în sensul indicat de săgeata din figură și revine în punctul A. Distanța parcursă de Bianca, aproximată la cel mai apropiat număr întreg este de:

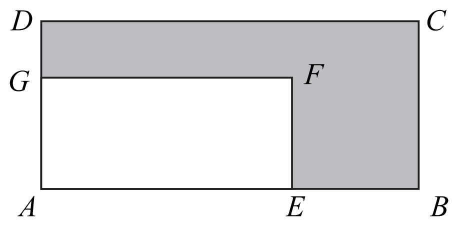


   a) 20 m; b) 25 m; c) 75 m; d) 100 m.

SUBIECTUL al III-lea

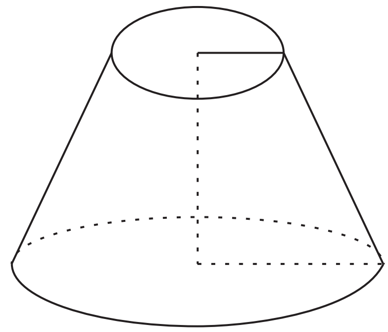
Scrieți rezolvările complete.

1. Doi muncitori au lucrat într-o lună 1650 de piese. Primul muncitor a lucrat cu 20% mai mult decât al doilea.
   a) Câte piese a lucrat primul muncitor?
   b) Cât la sută reprezintă numărul pieselor lucrate de al doilea muncitor din numărul pieselor lucrate de primul muncitor? (rotunjiți la cel mai apropiat număr natural)
2. Se consideră punctele $A(2;3)$, $B(-3;2)$, $C(3;-4)$, $D(-4,-5)$.
   a) Reprezentați punctele A, B, C și D într-un sistem de axe ortogonale.
   b) Fie A', B', C', și D' simetricele punctelor A, B, C și D față de axa Ox. Determinați coordonatele acestor puncte.
3. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+3}\right) : \frac{2x+4}{x^2+x} - \frac{x-3}{x+3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-2,-1,0\}$.
   a) Să se arate că $E(1) = 1$.
   b) Demonstrați că $E(x)$ are valoare constantă oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-2,-1,0\}$.
4. În figura alăturată este reprezentată o sală de gimnastică în formă de dreptunghi $ABCD$, deasupra căreia se află o sală de clasă sub forma dreptunghiului $AEFG$. Se știe că $AB = 60$ m, $BC = 45$ m, $2BE = AE$ și $AD = 3DG$.



   a) Determinați numărul maxim de saltele care pot fi așezate în sala de gimnastică, în zona hașurată, știind că, pentru a așeza o saltea este nevoie de o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile de 4 m, repespectiv 5 m.
   b) Arătați că punctele A, F și C sunt coliniare.
5. În triunghiul ABC, avem $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm și $BC = 60$ cm. Pe latura AB se ia un punct E astfel încât $\frac{AE}{BE} = \frac{1}{4}$, iar pe latura AC se consideră punctul F astfel încât $EF \| BC$.
   a) Demonstrați că $EFCB$ este trapez.
   b) Calculați perimetrul triunghiului AEF și perimetrul trapezului $EFCB$.

6. În figura alăturată este reprezentată o vază sub forma unui trunchi de con cu generatoarea $G = 17$ cm, raza bazei mici $r = 1$ cm și raza bazei mari $R = 9$ cm.
   a) Aflați înălțimea vazei.
   b) În vază se toarnă 1 litru de apă. Arătați că apa ocupă mai puțin de 70% din capacitatea vazei.



Testul 3

Mioara Gheorghe[4]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Valoarea necunoscutei x pentru care $2^6 \cdot 4^7 \cdot 8^8 = 2^x$ este egală cu:
   a) -12; b) 44; c) 8; d) 50.
2. Fie k valoarea raportului numerelor a și b. Dacă $b = 2$ și $k = 3,5$, atunci numărul a este egal cu:
   a) 7; b) 5,5; c) 1,75; d) 1,5.
3. Dacă $a + b = 21$ și $c = 7$ atunci $ac + cb$ este egal cu:
   a) 14; b) 28; c) 147; d) 3.
4. Extremii unei proporții sunt 2,1 și 6,5, iar unul dintre mezi este 3,9. Celălalt mez este:
   a) 2,5; b) 4,3; c) 5,2; d) 3,5.
5. Rezultatul calculului $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ este:
   a) $(x-1)(x+1)$; b) $x^2 + 1$; c) $x^4 - 1$; d) $4x$.
6. Patru elevi au raționalizat numitorul fracției $\frac{2}{3\sqrt{2}}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul următor:

Andrei	Ioana	Mihai	Ana
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{2}$.

   Elevul care a obținut rezultatul corect este:
   a) Andrei; b) Ioana; c) Mihai; d) Ana.

SUBIECTUL al II-lea

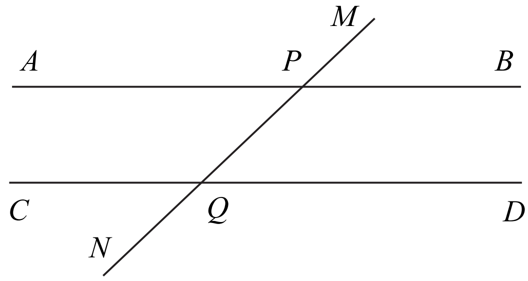
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În figura alăturată, $AB = 8$ cm și $BC = 12$ cm. Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv BC, atunci MN are lungimea de:

[4] Profesor, Şcoala Gimnazială ,,Constantin Teodorescu", Soldanu, Călărași, mioara_geambasu@yahoo.com

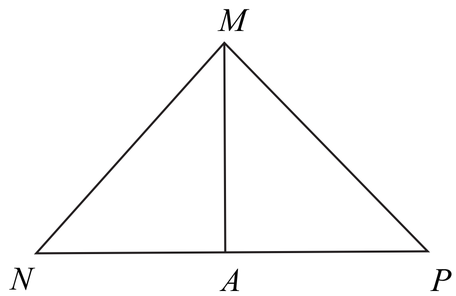
a) 16 cm; b) 14 cm; c) 4 cm; d) 10 cm.

2. În figura alăturată, dreptele paralele AB și CD sunt tăiate de secanta MN în punctele P, respectiv Q. Unghiurile $\sphericalangle APM$ și $\sphericalangle CQP$ sunt:



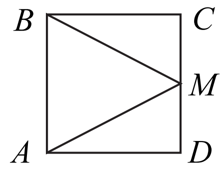
   a) alterne interne;
   b) alterne externe;
   c) corespondente;
   d) suplementare.

3. În figura alăturată, $\triangle MNP$ este isoscel, cu baza NP. Dacă $[MA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PMN$, $MA = 4$ cm și $NP = 8$ cm, atunci aria triunghiului $\triangle MAN$ este de:



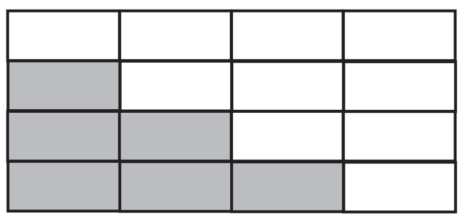
   a) 8 cm^2; c) 6 cm^2;
   b) 4 cm^2; d) 9 cm^2.

4. În figura alăturată, dreptunghiul $ABCD$ reprezintă un teren împărțit în trei parcele. Dacă triunghiul ABM este echilateral cu $AB = 10$ cm, atunci aria terenului este egală cu:



   a) 50 m^2; c) $50\sqrt{2}$ m^2;
   b) 15 m^2; d) $50\sqrt{3}$ m^2.

5. În figura alăturată este reprezentată suprafața unei ciocolate împărțite în 16 părțile egale. Dacă aria suprafeței hașurate este de 24 cm^2, atunci toată ciocolata are suprafața de:



   a) 54 cm^2; c) 84 cm^2;
   b) 64 cm^2; d) 48 cm^2.

6. Paralelipipedul dreptunghic cu dimensiunile de 3 cm, 4 cm și 12 cm are diagonala egală cu:

   a) 7 cm; b) 15 cm; c) 16 cm; d) 13 cm.

SUBIECTUL al III-lea

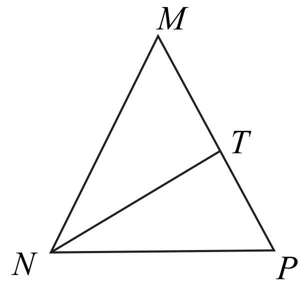
Scrieți rezolvările complete.

1. O persoană cheltuiește o sumă de bani astfel: în prima zi 30% din sumă, a doua zi $\frac{7}{20}$ din sumă și în a treia zi un sfert din sumă.
   a) În care zi a cheltuit cel mai mult?
   b) Dacă după cele trei zile persoanei i-au rămas 200 de lei, aflați valoarea sumei inițiale.
2. Se consideră expresia $E(x) = (2x+3)^2 - 3x(1-x) + 2(x+3)(x-3) - (3x-2)^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.
   a) Arătați că $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

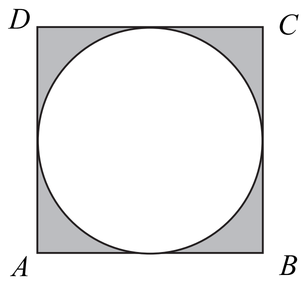
b) Demonstrați că $E(x) = 2x - 13$, unde $x \in \mathbb{R}$.

3. Se consideră $a = \sqrt{12} + \sqrt{8} - \sqrt{24}$ și $b = \sqrt{18} - \sqrt{54} + \sqrt{27}$.
   a) Determinați valoarea raportului numerelor b și a.
   b) Arătați că $a \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}) = 4\sqrt{6} - 2$.

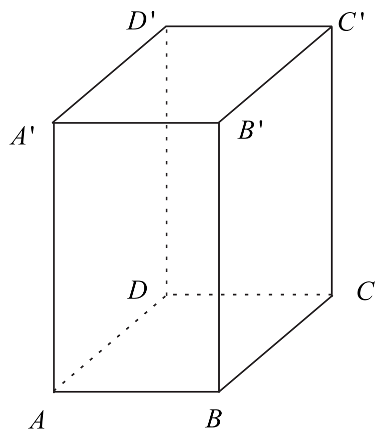
4. În figura alăturată triunghiul MNP este isoscel, cu $MN = MP$ și $\sphericalangle M = 36°$. Punctul $T \in (MP)$, astfel încât $[NT$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MNP$.
   a) Arătați că triunghiul TMN este isoscel.
   b) Demonstrați că $PN^2 = PM \cdot PT$.



5. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu $AB = 40$ cm, în care s-a înscris un cerc.
   a) Determinați lungimea cercului.
   b) Arătați că suprafața hașurată este mai mare de 340 cm^2. (Se folosește faptul că $3,14 < \pi < 3,15$).



6. În figura alăturată este reprezentată o cutie sub forma unei prisme patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 5$ cm și $AA' = 10$ cm.
   a) Aflați lungimea segmentului $[AC']$.
   b) Aflați măsura unghiului dintre planele $(A'AC)$ și $(A'AB)$.



Testul 4

Florentina-Alina Ștefan[5]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $(\sqrt{0,16} : 0,4 - 4) : 3$ este:
   a) -1; b) 0; c) 2; d) 1.

2. Fie a, b numere reale nenule. Dacă $(a - b)^2 = 49$ și $ab = 30$, atunci $a^2 + b^2$ este egal cu:
   a) 49; b) 79; c) 109; d) 19.

3. Produsul a două numere naturale pentru care cel mai mare divizor comun al lor este 9 și cel mai mic multiplu comun comun este 54 este:

[5] Lect.univ.dr., Universitatea din Pitești, florentina.stefan@upit.ro

a) 63; b) 486; c) 1; d) 6.

4. O soluție reală a ecuației $(x^2+2)(x+2)^2=0$ este:

a) -2; b) 4; c) 0; d) 8.

5. Numărul submulțimilor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N}^\star : |x+1|<3\}$ este egal cu:

a) 2; b) 4; c) 8; d) 16.

6. Andreea afirmă că dintre numerele $a=\frac{1}{n^2}$ și $b=\frac{(-1)^{n^2+n}}{2n^2}$, cu $n\in\mathbb{N}^\star$ mai mic este numărul b. Afirmația ei este:

a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Aria unui triunghi ABC cu $AB=6$ cm, $AC=8$ cm și semisuma măsurilor unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ egală cu $75°$ este:

a) 32 cm^2; b) 16 cm^2; c) 12 cm^2; d) 24 cm^2.

2. Fie triunghiul MNP și I centrul cercului înscris triunghiului. Dacă măsura unghiului $\sphericalangle NIP=130°$, atunci măsura unghiului $\sphericalangle M$ este egală cu:

a) $100°$; b) $80°$; c) $20°$; d) $60°$.

3. Fie un plan α orizontal și AB o dreaptă oblică, astfel încât punctul $A\in\alpha$, iar B un punct exterior lui. Dacă lungimea segmentului $[AB]$ este egală cu $2\sqrt{3}$ cm iar măsura unghiul pe care îl face dreapta cu planul este de $30°$, atunci proiecția dreptei în planul α este egală cu:

a) $4\sqrt{3}$ cm; b) 2 cm; c) 3 cm; d) $\sqrt{3}$ cm.

4. Se consideră în planul xOy punctele: $A(3;2)$, $B(-2;3)$ și $C(4,5)$. Lungimea medianei dusă din vârful A este egală:

a) 4 u.m; b) $4\sqrt{2}$ u.m; c) 2 u.m; d) $2\sqrt{2}$ u.m.

5. Lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile proporționale cu 3,4, 5 și volumul egal cu 480 cm^3 este egală cu:

a) 60 cm; b) 8 cm; c) 30 cm; d) $10\sqrt{2}$ cm.

6. Se consideră prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ cu $AB=6$ cm și $AA'=8$ cm. Tangenta unghiului dintre dreptele $A'B$ și CC' este egală cu:

a) $\frac{4}{3}$; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Fie numerele reale pozitive, nenule a și b. Demonstrați că dacă suma lor este egală cu $2\sqrt{2}$, atunci produsul lor este mai mic sau egal cu 2.
2. Se consideră numerele: $a=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}+\sqrt{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ și
$b=\sqrt{3-4\sqrt{4-2\sqrt{3}}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

a) Arătați că $a=9$.

b) Determinați media geometrică a numerelor a și b.

3. Fie funcția liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinește condiția $f(x+1) = 2x+1$.
   a) Determinați funcția.
   b) Să se determine soluția pozitivă a ecuației $f(x) = x^2 - 4$.
4. Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 12$, oricare ar fi x, y numere reale.
5. Fie triunghiul ABC cu lungimile laturilor egale cu $a, b, c \in \mathbb{R}_+^\star$, numere care satisfac relația
$$(a-8)^2 + \sqrt{b^2 - 8b + 16} + \sqrt{(c - 4\sqrt{3})^2} = 0.$$
   Fie M mijlocul lui $[BC]$, $m(\sphericalangle AMB) = 120°$ și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Determinați:
   a) natura triunghiului ABC.
   b) dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, cu $BC = 8$ cm, $AC = 4$ cm și $AB = 4\sqrt{3}$ cm, calculați distanța de la punctul D la dreapta AM.
6. Secțiunea axială $ABB'A'$ a unui cilindru circular drept este un pătrat. Punctele A, M, B, N sunt situate pe cercul ce reprezintă baza cilindrului (în ordinea dată), astfel încât $AMBN$ este pătrat, iar distanța de la punctul A' la dreapta MB este egală $6\sqrt{6}$. Aflați:
   a) aria desfășurării laterale a cilindrului.
   b) sinusul unghiului format de dreptele $A'M$ și AN.

Testul 5

Adrian Țurcanu[6]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Numărul divizorilor naturali ai numărului natural 8 este:
   a) 2; b) 4; c) 6; d) 8.
2. Dacă $A = \{2, 3, 5, 7\}$ și $B = \{2, 5, 7, 8, 9\}$, atunci suma elementelor mulțimii $A \cap B$ este:
   a) 9; b) 11; c) 14; d) 34.
3. Produsul celor mai mici 4 pătrate perfect nenule este:
   a) 10; b) 576; c) 0; d) 24.
4. După o scumpire cu 15% un produs costă 92 de lei. Prețul produsului înainte de scumpire a fost:
   a) 90 lei; b) 85 lei; c) 80 lei; d) 78 lei.
5. Numărul vizitatorilor unei expoziții de pictură în fiecare zi a unei anumite săptămâni este dat în tabelul de mai jos:

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Nr. vizitatori	150	200	180	225	240	590	870

   Difența dintre numărul de vizitatori în ziua de duminică și numărul de vizitori în ziua de joi este de:

[6] Lect.univ.dr., Universitatea din Pitești, adrianturcanu85@yahoo.com

a) 690; b) 745; c) 650; d) 645.

6. Meciul de fotbal România - Italia a început la ora 19:00, iar primul gol al partidei s-a marcat în minutul 38 al primei reprize. Arbitrul a decis să fluiere finalul primei reprize la ora 19:46 acordând un minut de prelungire. Alin afirmă: "Din momentul marcării primului gol și până la pauză au trecut 7 minute". Cum este afirmația lui Alin?

   a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care este numărul dreptelor determinate de 4 puncte distincte, oricare 3 necoliniare?

   a) 1; b) 3; c) 6; d) 10.

2. Într-un dreptunghi cu perimetrul 36 cm, lungimea este cu 4 cm mai mare decât lățimea. Aria dreptunghiului este:

   a) 320 cm^2; b) 77 cm^2; c) 100 cm^2; d) 54 cm^2.

3. Măsurile a două unghiuri complementare sunt direct proporționale cu 3 și 7. Diferența dintre măsurile celor două unghiuri este egală cu:

   a) $10°$; b) $26°$; c) $30°$; d) $36°$.

4. În triunghiul dreptunghic ABC, $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ și $AD = 6\sqrt{3}$ cm. Aria triunghiului ABC este egală cu:

   a) $12(3 + \sqrt{3})$ cm^2; c) $72\sqrt{3}$ cm^2;
   b) 144 cm^2; d) 72 cm^2.

5. O cofetărie confecționează bănuți de ciocolată de formă circulară cu raza 1,5 cm și înălțimea de 4 mm. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

   a) volumul a 1000 de bănuți de ciocolată este mai mic decât 2800 cm^3;
   b) volumul a 1000 de bănuți de ciocolată este mai mare decât $2,8$ dm^3;
   c) volumul unui bănuț de ciocolată este egal cu 3 cm^3;
   d) volumul a 100 de bănuți de ciocolată este mai mare decât $2,8$ dm^3.

6. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 15 cm, 10 cm și respectiv 6 cm. Care este lungimea diagonalei paralelipedului?

   a) 18 cm; b) 19 cm; c) 25 cm; d) 31 cm.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Dacă grupăm elevii dintr-o clasă câte 4 sau câte 7 rămân de fiecare dată doi elevi negrupați.

   a) Explicați de ce nu pot fi 22 de elevi.
   b) Determinați numărul minim de elevi din clasă, știind că sunt mai mult de 10 elevi.

2. Fie expresia $E(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

   a) Calculați $E(1, 2)$.
   b) Determinați elementele mulțimii $A = \{a \in (0, \infty) | E(3a, a) \geq 25\}$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2a$, $a \in \mathbb{R}$.

   a) Arătați că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, valoarea raportului $\frac{f(m)-f(n)}{m-n}$ este constantă.

b) Determinați valorile lui a astfel încât aria triunghiului determinat de graficul funcției f cu axele de coordonate să fie egală cu 32.

4. Fie $ABCD$ un pătrat cu aria 64 cm^2 și $P \in (AB)$ astfel încât $AP = 3PB$.

   a) Calculați perimetrul pătratului $ABCD$.

   b) Calculați aria trapezului $PBCD$.

5. Lungimile catetelor AB și AC ale triunghiului dreptunghic ABC sunt invers proporționale cu $0,2$ și respectiv $0,08(3)$.

   a) Arătați că $12AB = 5AC$.

   b) Ştiind că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 120 cm, determinați aria triunghiului.

6. Un ornament are forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ cu latura bazei $AB = 12$ cm și apotema $VM = 10$ cm, unde M este mijlocul laturii BC.

   a) Dacă VO este înălțimea ornamentului, arătați că $VO = 8$ cm.

   b) Știind că densitatea materialului din care este este făcut ornamentul este 8.5 g/cm^3, calculați masa ornamentului.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Adina Florina Militaru[1]

SUBIECTUL I

1. Să se arate că $\sqrt{8}-\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{8}+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-5$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(a^2+1,a)$ se găseşte pe graficul funcţiei f.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=2$.
4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor 8.
5. În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$, $C(6,9)$. Să se determine ecuaţia medianei dusă din vârful B al triunghiului ABC.
6. Să se calculeze $\cos^2 40^\circ+\cos^2 50^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ şi $M(a)=aA+B$, unde a este un număr real.
   a) Să se calculeze $\det A$.
   b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$, ştiind că suma elementelor matricei $M(a)+M(a-1)$ este egală cu 23.
   c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det M(a)=9$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\star y=\frac{1}{9}xy+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$, $x,\ y\in\mathbb{R}$.
   a) Să se arate că $3\star(-1)=1$.
   b) Să se arate că $x\star y=\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{3}y+1\right)-\frac{1}{3}$, $x,\ y\in\mathbb{R}$.
   c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\star x=\frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x^2-4$.
   a) Să se calculeze $f'(x)$.
   b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)+4}$.
   c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f.
2. Fie funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
   a) Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)dx$.
   b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)f'(x)dx$.
   c) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

[1] Profesor, Grupul Școlar Construcții de Mașini, Colibași, popescuadina93@yahoo.com

Testul 2

Marius Macarie[2]

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că numărul $z = (3 + i)^4 + (3 - i)^4$ este întreg.
2. Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2 - mx + 1 = 0$. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $(x_1 - x_2)^2 = 5$.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|2x - 4| = |x + 3|$.
4. Să se afle numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 12 submulțimi ordonate de două elemente.
5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(2, -3)$ și $B(3, -2)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.
6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 6\sqrt{3}$, $A = \dfrac{\pi}{6}$ și $B = \dfrac{\pi}{4}$. Să se calculeze BC.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A\left(a\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ln a - 1 & \ln a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real, $a \in (0, \infty)$.
   a) Să se arate că $\det(A(e) + A(1)) = 2$.
   b) Să se calculeze $A^{2020}(a)$.
   c) Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2 = A(e^2)$.
2. Pentru $x, y \in [0, \infty)$ se definește legea de compoziție $x \star y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$.
   a) Să se arate că $0 \star 1 = 1$.
   b) Să se arate că legea de compoziție „$\star$" este asociativă.
   c) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de 2020 ori}} = x$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
   a) Să se arate că $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
   b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.
   c) Să se afle imaginea funcției f'.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = x \cdot 2^x$.
   a) Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{2\ln 2 - 1}{\ln^2 2}$.
   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.
   c) Să se arate că orice primitivă a funcției f are exact un punct de inflexiune.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 3

Monica Dumitrache[3]

SUBIECTUL I

1. Arătați că $10^{-1} + 10^0 + 10^1 = 11,1$.
2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -5x - 1$. Stabiliți în ce cadran se află punctul de intersecție al graficelor celor două funcții.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 5x + 6} = x$.
4. Prețul unui laptop se ieftinește de ,,black friday" cu 15% și apoi se scumpește cu 10%. Determinați prețul inițial al laptopului știind că prețul final este de 1496 lei.
5. În triunghiul ABC, punctele M, N și, respectiv P, sunt mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv AC. Determinați $\left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NP}\right|$ știind că $BC = 10$ cm.
6. În triunghiul ABC dreptunghic în A avem $\operatorname{ctg} B = \dfrac{4}{3}$. Determinați $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Arătați că $AB = C$.
   b) Demonstrați că $\det(AB) \neq \det(BA)$.
   c) Determinați matricea X știind că $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \otimes y = xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 + \sqrt{2}.$$

   a) Arătați că $0 \otimes \sqrt{2} = \sqrt{2}$.
   b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x \otimes x \leq 2 + \sqrt{2}$.
   c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x \otimes 4^x = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 3x + 2)\,e^x$.

   a) Arătați că $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\dfrac{1}{e^2}$.
   b) Determinați ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.
   c) Determinați intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{3x^2 + 3}}$.

   a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \left(12 - f^2(x)\right) dx = 3\pi$.
   b) Demonstrați că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$ este mai mică decât 2.
   c) Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{x^2 + 1}{x} dx$.

[3] Profesor, Colegiul Economic ,,Ion Ghica", Târgoviște, dumitrache_m0nica@yahoo.com

Testul 4

Mihai Florea Dumitrescu[4]

SUBIECTUL I

1. Aflaţi partea reală a numărului $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$, $i^2 = -1$.
2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -mx + 1$, $m \in \mathbb{R}$. Aflaţi $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $(f \circ g)(1) + (g \circ f)(0) = 0$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 \sqrt[5]{2^{10x}} = 3 - x$.
4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{0!, 1!, 2!, 3!, \ldots, 20!\}$, acesta să fie divizibil cu 100.
5. În sistemul cartezian xOy se consideră dreapta $d : x - y + 5 = 0$. Găsiţi două puncte distincte pe dreapta d, egal depărtate de originea axelor de coordonate.
6. Fie triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 6$ și $BC = 9$. Calculaţi $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Calculaţi $\det(2A)$.
   b) Calculaţi $A + A^{2021}$.
   c) Rezolvaţi în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ecuaţia $X \cdot A = A^t$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziţie $x \circ y = xy - 21x - 21y + 462$.
   a) Arătaţi că $x \circ y = (x - 21)(y - 21) + 21$ pentru orice numere reale x și y.
   b) Aflaţi $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\frac{a \circ 21}{a \circ 20} \in \mathbb{Z}$.
   c) Aflaţi un număr natural a, astfel încât $a \circ a$ este pătrat perfect.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1) \ln \frac{x - 1}{2}$.
   a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
   b) Aflaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
   c) Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(1, \infty)$.
2. Se consideră integrala $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{x^4 + 1} dx$, $n \in \mathbb{N}^\star$.
   a) Calculaţi I_1.
   b) Calculaţi I_3.
   c) Arătaţi că $I_2 \leq \frac{1}{2}$.

[4] Profesor, Liceul ,,Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

Testul 5

Raluca Mihaela Georgescu[5]

SUBIECTUL I

1. Să se determine primul termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_5 = 32$ şi $b_7 = 128$.
2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m+2)x - m + 3$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile $x_1,\ x_2$. Să se determine valoarea parametrului real m pentru care $5x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) = 3$.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice relaţia $n! + 3n < 25$.
5. Să se determine lungimea înălţimii dusă din vârful A al triunghiului ABC, cu $A(1, 2)$, $B(5, -3)$, $C(-1, 4)$.
6. Să se afle aria triunghiului ABC, ştiind că $AB = 5$, $BC = 6$ şi $\operatorname{tg} B = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ şi $M(a) = I_2 + aA$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
   a) Să se calculeze $\det(M(5))$.
   b) Să se verifice că $M(a)M(b) = M(a + b - ab)$.
   c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(M(a))^2 = M(-3)$.
2. Pe mulţimea $G = (3, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie " $*$ ", $x * y = xy - 3(x + y) + 12$.
   a) Să se arate că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice $x, y \in G$.
   b) Să se rezolve în G ecuaţia $x * x * x * x = x$.
   c) Să se calculeze $\sqrt[3]{4} * \sqrt[3]{5} * \cdots * \sqrt[3]{2021}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$.
   a) Să se calculeze $f'(x)$.
   b) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x = 1$ situat pe grafic.
   c) Să se arate că funcţia nu admite puncte de extrem.
2. Fie funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.
   a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1)f(x)dx$.
   b) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este descrescătoare pe intervalul $(-1, \infty)$.
   c) Să se determine acea primitivă F a funcţiei f pentru care $F(0) = 1$.

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, gemiral@yahoo.com

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

TESTUL 1

Raluca Mihaela Georgescu[1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se afle modulul numărului complex $z = \dfrac{3+2i}{2-3i}$. **(5p)**

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m+2)x + m^2$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât vârful parabolei asociate funcţiei f să se afle în al doilea cadran. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2\log_2(2^x - 1) + 1 = \log_2(4^x - 1)$. **(5p)**

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr cu cel puţin două cifre distincte din mulţimea $A = \{0, 1, 2, 3\}$, acesta să aibă trei cifre. **(5p)**

5. În sistemul cartezian XOY se consideră punctele $A(4,4)$, $B(1,2)$, $C(0,2)$. Să se determine coordonatele unui punct C situat pe axa Ox, astfel încât aria triunghului ΔABC să fie 3. **(5p)**

6. Să se afle aria triunghului ΔABC, ştiind că $AB = 6$, $AC = 10$, $\operatorname{ctg} A = 3$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie sistemul omogen de ecuaţii liniare $\begin{cases} mx + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + mz = 0 \\ 3x + my + 2z = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine m astfel încât sistemul să aibă soluţie unică. **(5p)**

b) Să se rezolve sistemul pentru $m = 1$. **(5p)**

c) Pentru $m = -5$, să se determine acea soluţie (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + y_0 + z_0 = 9$. **(5p)**

2. Pe mulţimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$, se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x^{\log_x y}$.

a) Să se calculeze $2 \star 16$. **(5p)**

b) Să se arate că legea de compoziţie este bine definită. **(5p)**

c) Să se rezolve în mulţimea G ecuaţia $\sqrt{x} \star x \star x^2 = 4$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$. **(5p)**

b) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$ situat pe graficul funcţiei. **(5p)**

c) Să se arate că $f(x) \geq \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

---

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 (3x+2)^n e^x dx$.

a) Să se calculeze I_1. **(5p)**

b) Să se arate că $I_n + 3nI_{n-1} = 5^n e - 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. **(5p)**

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$. **(5p)**

TESTUL 2

Marius Macarie[2]

SUBIECTUL I

1. Determinaţi numărul complex z, ştiind că $2z - 3\overline{z} = -4 + 10i$.
2. Determinaţi cel mai mare număr întreg pentru care graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 7x + m - 1$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x^2 - 5x + 6) - 2\log_3 x = 0$.
4. Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra zecilor număr prim.
5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-2,1)$, $C(-3,-1)$. Să se determine coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.
6. Calculaţi $\operatorname{tg} a$, ştiind că $\sin a = -\dfrac{5}{13}$ şi $a \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x^2 & y^2 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   a) Calculaţi $\det A(-1,2)$.
   b) Arătaţi că $\det A(x,y) = (x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x, y.
   c) Determinaţi matricea $Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(-1,2) \cdot Z = A(2,0)$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă
$$x \circ y = 3xy - 6(x+y) + 14.$$
   a) Demonstraţi că $x \circ y = 3(x-2)(y-2) + 2$.
   b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \circ 4^x \circ 8^x = 2$.
   c) Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că $f(x) \circ f(y) = f(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot e^x + 2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : (-2,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + \ln(x+2)}{x+2}$.
   a) Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{3 - \ln(x+2)}{(x+2)^2}$, $x \in (-2,\infty)$.
   b) Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $A(1,2)$ şi este paralelă cu tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcţiei f.
   c) Determinaţi intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-2020\cdot\ln x}{x^{2021}}$.

a) Demonstraţi că funcţia $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{\ln x}{x^{2020}}$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi $\displaystyle\int_1^{e^2} x^{2021}\cdot f(x)dx$.

c) Determinaţi $a>1$ astfel încât $\displaystyle\int_1^{a} F(x)\cdot f(x)dx=\frac{1}{2a^{4040}}$.

TESTUL 3

Maria-Crina Diaconu [3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se calculeze $3+8+13+\ldots+353$. **(5p)**

2. Fie ecuaţia $(m-1)x^2+(2m-3)x+m=0$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia să aibă două soluţii de semne contrare. **(5p)**

3. Să se rezolve ecuaţia $3n!+(n+1)!=32(n-1)!$ **(5p)**

4. Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3\}\to\{4,5,6\}$, astfel încât $f(2)=5$. **(5p)**

5. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1,2)$ şi face cu semiaxa pozitivă Ox un unghi de $30°$. **(5p)**

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&4&3\end{pmatrix}\in S_5$

a) Să se determine numărul de inversiuni ale permutării τ. **(5p)**

b) Să se determine cel mai mic număr natural $n\in\mathbb{N}$ pentru care $\sigma^n=e$, e permutarea identică. **(5p)**

c) Să se rezolve în S_5 ecuaţia $x\cdot\sigma=\tau$. **(5p)**

2. Se consideră $H=[0,1)$ şi legea de compoziţie $x\star y=\{x-y+1\}$, unde $\{a\}$ este partea fracţionară a numărului a.

a) Să se calculeze $\dfrac{2}{3}\star\dfrac{1}{4}$. **(5p)**

b) Să se rezolve în H ecuaţia $x\star x\star x=\dfrac{1}{5}$. **(5p)**

c) Să se stabilească dacă legea de compoziţie ”$\star$” admite element neutru. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\ln(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}}$.

[3] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

a) Să se studieze monotonia funcţiei f şi să se determine punctele de extrem. **(5p)**

b) Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei. **(5p)**

c) Dacă $m \in \mathbb{R}$, să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = 1 - m$. **(5p)**

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{2 - \cos^2 x}$.

a) Să se studieze paritatea funcţiei şi să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{f(x)}{x} \cdot \cos x dx$. **(5p)**

c) Să se studieze dacă funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)dt$ este bijectivă. **(5p)**

TESTUL 4

Adrian Țurcanu[4]

Subiectul I (30 puncte)

1. Determinaţi partea întreagă a numărului $\log_2 352$.
2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 5$, $m \in \mathbb{R}$. Determinaţi mulţimea valorilor lui m pentru care graficul funcţiei f este tangent la axa Ox.
3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x + 5^x = 7^x$.
4. Dintr-o echipă formată din 7 bărbaţi şi 4 femei se alege un comitet format din 4 persoane. Determinaţi numărul de comitete care conţin cel puţin un bărbat.
5. Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm şi $AC = 7$ cm.
6. Determinaţi $x \in [0, \pi]$ astfel încât $\sin^2 x + \cos x = 1$.

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & 2m & 1-m \end{pmatrix}$

   a) Calculaţi $\det(A(3))$.

   b) Determinaţi mulţimea valorilor lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

   c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\mathrm{Tr}(A^2(m)) = -10$, unde $\mathrm{Tr}(A)$ este urma matricei A.

2. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie $x \circ y = xy - 3x - 3y + m$, $m \in \mathbb{R}$.

   a) Arătaţi că "$\circ$" este comutativă pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

   b) Determinaţi m astfel încât "$\circ$" să aibă element neutru.

   c) Dacă $m = -7$, determinaţi valorile reale ale lui x astfel încât $(x \circ x) \circ x = 0$.

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, adrianturcanu85@yahoo.com

Subiectul al III-lea. (30 puncte)

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2+4}$. Arătaţi că:

   a) $f(x) \cdot f(-x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

   b) f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

   c) $f(x) + f(-x) \geq \frac{1}{10}$, pentru orice $x \in (-\infty, 4]$.

2. Fie $I_n = \int\limits_0^1 e^x(x^n + nx)$, $n \in \mathbb{N}$.

   a) Calculaţi I_0 şi I_1.

   b) Arătaţi că $I_2 = e$.

   c) Arătaţi că $I_{n+1} = e - (n+1)I_n + n(n+1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

TESTUL 5

Antonio Nuică[5]

SUBIECTUL I (30p) SUBIECTUL I (30p)

1. Să se determine partea reală a numărului $\dfrac{1-i}{3+i}$. **(5p)**

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $|\log_2(x^2-1)| = 1$. **(5p)**

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^2 - mx + 1 = 0$, are două rădăcini reale strict pozitive. **(5p)**

4. Să se determine numărul funcţiilor injective $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ cu proprietatea $f(1) = 1$, $f(2) = 3$. **(5p)**

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sin 3x = \frac{1}{2}$. **(5p)**

6. Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul ABC, pentru care $AB = 6$, $BC = 10$, $CA = 8$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie $f = X^3 - 2X^2 - aX + 2a$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine rădăcinile lui f pentru $a = 1$. **(5p)**

b) Să se determine rădăcinile lui f pentru $a = -1$. **(5p)**

c) Să se arate că pentru $a \in (-\infty, -2)$, f nu are toate rădăcinile reale. **(5p)**

2. Se consideră sistemul (S): $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

a) Să se rezolve sistemul. **(5p)**

b) Să se determine soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului cu proprietatea $-x_0 + y_0 + z_0 = 1$. **(5p)**

---

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com

c) Să se determine soluţiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului cu proprietatea $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul lui f. **(5p)**

b) Să se determine punctele de întoarcere ale lui f. **(5p)**

c) Să se determine punctele de inflexiune ale lui f. **(5p)**

2. Fie $I(a, b) = \int \frac{ax+b}{x^2+x+1} dx$, a, $b \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $I(2, 1)$. **(5p)**

b) Să se calculeze $I(0, 1)$. **(5p)**

c) Să se calculeze $I(1, 1)$. **(5p)**

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Antonio Nuică[1]

SUBIECTUL I

Fie ecuaţia $x^2 - \alpha x + \alpha - 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are soluţii reale distincte.
b) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are o soluţie dublă celeilalte.
c) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2} > 2x_2x_2$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile inecuaţiei.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2|}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei.
b) Să se determine punctele de extrem şi punctele unghiulare ale funcţiei.
c) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei.
d) Să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$.

SUBIECTUL al III-lea

Fie $\triangle ABC$, unde $A(5, -4), B(-1, 2), C(5, 1)$.

a) Să se determine aria triunghiului ABC.
b) Să se scrie ecuaţia înălţimii din B.
c) Să se determine distanţa de la G la BC (G fiind centrul de greutate al triunghiului).

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu[2]

SUBIECTUL I Fie matricele pătratice $A(a) \in \mathcal{M}_3[\mathbb{R}]$, $A(a) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Să se calculeze $(A(a))^n$;
b) Să se determine valorile parametrului real a pentru care $A(a)+(A(a))^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$;
c) Să se determine $X \in \mathcal{M}_3[\mathbb{R}]$ astfel încât $A(a)X = XA(a)$;
d) Să se rezolve ecuaţia $\det A(a) + 6\dfrac{\det A(a)}{\text{tr } A(a)} - \text{tr } A(a) - 6 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcţia $f : (1, \infty) \to (0, \infty)$, cu proprietăţile $f'(x) - 2\sqrt{f(x)} = 0$ şi $f(1) = 0$.

a) Să se determine $f(x)$;
b) Să se arate că funcţia f este convexă pentru orice $x > 1$;

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com
[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

c) Să se verifice dacă graficul funcţiei f admite asimptote;
d) Să se determine aria subgraficului delimitat de axa OX, graficul funcţiei $g:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}$ şi dreptele de ecuaţii $x=2$ şi $x=3$.

SUBIECTUL al III-lea

În planul de coordonate XOY se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(2,6)$.

a) Să se determine coordonatele unui punct C astfel încât $OABC$ să fie paralelogram;
b) Pentru C este aflat la punctul a), să se determine coordonatele unui punct N astfel încât $AN\perp OY$ şi punctele B,C,N sunt coliniare;
c) Pentru N este aflat la punctul b), să se determine aria triunghiului ABN;
d) Să se determine aria patrulaterului $OABN$.

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră şi Elemente de analiză matematică

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia:

$$\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}>1.$$

2. Se consideră ecuaţia: $x^4-3x^3+5x^2-4x+2m=0$.

   a) Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţia să admită rădăcina $x_1=1+i$.
   b) Dacă $x_1=1+i, x_2, x_3$ şi x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei date, să se calculeze sumele:

$$S_1=|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2+|x_4|^2.$$

$$S_1=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

3. Fie funcţia de variabilă reală $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2x+c}$, ($a,b,c$ parametri reali).

   a) Să se determine asimptota orizontală.
   b) În ce condiţii graficul funcţiei admite cel puţin o asimptotă verticală?
   c) Să se determine a,b,c astfel încât să existe o singură asimptotă verticală şi graficul să intersecteze asimptota orizontală.

4. Se dă integrala $I_n=\int\limits_0^n \dfrac{1}{(t+2)(\sqrt{t+1}+1)}dt, n\in\mathbb{N}$.

   a) Calculaţi I_n.
   b) Calculaţi limita şirului $(I_n)_n$.

Geometrie plană şi în spaţiu, Geometrie analitică şi Trigonometrie

1. Fie ABC un triunghi oarecare. Se cere:

   a) Să se arate că piciorul înălţimii din A şi mijloacele laturilor triunghiului formează un patrulater inscriptibil.

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

b) Să se arate că simetricul ortocentrului triunghiului faţă de o latură a sa se găseşte pe cercul circumscris triunghiului.

2. a) Să se rezolve ecuaţia $sin^2x + tg^2x = \frac{3}{2}$.

   b) Să se precizeze soluţiile ecuaţiei din intervalul $[0, 2\pi]$.

3. În sistemul de axe xOy se consideră punctele $A(0,0), B(m,0), C(m-1, 1+2m), m \in (0,\infty)$. Se cere:

   a) Să se determine m astfel încât triunghiul format de cele trei puncte să fie isoscel.

   b) Să se afle locul geometric al mijlocului medianei duse din C.

4. O piramidă are ca bază triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $AB = AC = a$ şi muchia SA perpendiculară pe bază, $SA = b$. Să se calculeze:

   a) aria totală a piramidei;

   b) măsura unghiului diedru format de feţele $[SBC]$ şi $[ABC]$ în cazul $a = b\sqrt{2}$.

   c) aria secţiunii în piramidă determinată de planul care trece prin SA şi este perpendicular pe BC.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 1999)

Teste grilă pentru admiterea la facultate

TESTUL 1

Mihaela Gabor[1]

1. Fie funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}$. Intervalul maxim pentru care funcţia este constantă este:
   a) $[1,\infty)$; b) [2,3]; c) [1,26]; d) [24,26]; e) $\emptyset$;

2. Valoarea lui x pentru care are loc egalitatea $C_x^1+C_x^2+...+C_x^{x-1}=254$ este:
   a) $x=10$; b) $x=-10$; c)$x=8$; d) $x=100$; e) $x=54$;

3. Se dau mulțimile $A=[1,2]\cup\{3\}, B=\{1\}\cup[2,3]$. Să se determine $A\times B$.

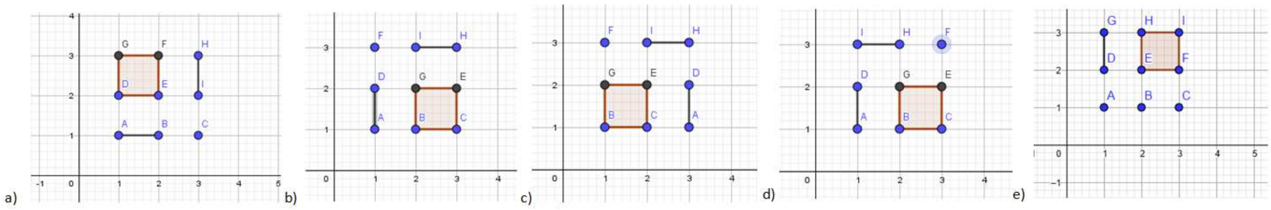


Fig. 1:

4. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie: $x*y=xy-4x-4y+20$. Fie S suma soluţiilor ecuaţiei $x*x*x=-4$. Atunci S este:
   a) $S=2$; b) $S=30$; c) $S=-15$; d) $S=0$; e) $S=8$;

5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. Calculaţi $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2021)$.
   a) $\frac{2020}{2021}$; b) $\frac{2021}{2022}$; c) $\frac{2022}{2021}$; d) $\frac{2019}{2021}$; e) $\frac{2021}{2020}$;

6. Fie polinoamele $f=aX^{n+2}+bX^n+2$ şi $g=(X-1)^2, f,g\in\mathbb{R}[X]$. Mulţimea $S=\{(a,b)/f\vdots g\}$ este:
   a) $S=\{(-1,-1)\}$; b) $S=\{(n,-n-2)\}$; c) $S=\{(n,-n)\}$; d) $S=\{(-n,n+2)\}$; e) $S=\emptyset$;

7. Fie $f(x)=\frac{x^2+2ax+b}{x^2+1}, a\neq b, a,b\in\mathbb{R}$. Să se determine a,b astfel încât $f(1)=2$ şi tangenta la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x=2$ să fie paralelă cu axa OX. Cu a,b determinaţi calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.
   a) 1; b) $\ln 2$; c) $1+4\ln 2-3\frac{\pi}{2}$; d) $-\ln 2$; e) $\frac{\pi}{2}$;

8. Valoarea integralei $\int_0^{\sqrt[3]{3}} x^5 e^{\frac{-x^3}{3}}dx$ este:
   a) $3-\frac{6}{e}$; b) $-\frac{6}{e}$; c) 0; d) 3; e) $3+\frac{6}{e}$;

[1] Profesor, Colegiul Național ,,C. Carabella”, Târgovişte, *mihaela_gab0r@yahoo.com*

9. Considerăm funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} mx+\frac{1}{2}, & \text{pentru } x\in[0,1] \\ \frac{x^2}{2}+n, & \text{pentru } x\in(1,2]\end{cases}$ şi fie $S=\{(m,n)/m,n\in\mathbb{R}\}$ mulţimea valorilor parametrilor pentru care funcţia verifică condiţiile teoremei lui Lagrange şi $C=\{c/c\in[0,2]\}$ mulţimea valorilor punctelor c care se obţin aplicând teorema. Atunci:
a) $S=(-1,0)$ şi $C=\{5\}$; b) $S=(-1,-1)$ şi $C=\{\frac{9}{4}\}$; c) $S=(-\frac{1}{2},-3)$ şi $C=\{\frac{1}{4}\}$; d)$S=(1,1)$ şi $C=\{\frac{5}{4}\}$; e) $S=(1,3)$ şi $C=\{9\}$;

10. Calculaţi expresia $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$:
a) 2; b) 4; c) 0; d) 1; e) -1;

11. Soluţia ecuaţiei $(x+1)+(x+4)+(x+7)+...+(x+28)=155$ este:
a) $x=1$; b) $x=-1$; c) $x=27$; d) $x=100$; e) $x=55$;

12. Ecuaţia $2^{\sin x+\frac{1}{2}}+2^{\sin x+\frac{5}{2}}=5\sqrt{2}$ are mulţimea soluţiilor dată de:
a) $S=\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$; b) $S=\{2k\pi+\frac{\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\}$; c) $S=\{-\frac{\pi}{6}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$; d) $S=\emptyset$; e) $S=\{(2k+1)\frac{\pi}{8}/k\in\mathbb{Z}\}$

13. Pentru binomul $(x^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ suma coeficienţilor binomiali este 512. Mulţimea S a soluţiilor ecuaţiei $\frac{1}{84x^2}\cdot T_7+x\cdot T_{10}=2$ este:
a) $S=\{-1,1\}$; b) $S=\emptyset$; c) $S=\{2\}$; d) $S=\{1\}$; e) $S=\{6,8\}$;

14. Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{k}+\frac{k}{\sqrt{x+1}}, k>0$. Atunci volumul V al corpului de rotaţie mărginit de graficul funcţiei f, axa OX, axa OY şi dreapta $x=1$ este:
a) $V=\pi(\frac{3+4k^2}{2k^2}+k^2\ln 2)$; b) $V=\pi\cdot\frac{3+4k^2}{2k^2}$; c) $V=\pi k^2\ln 2$; d) $V=\pi(1+\ln 2)$; e) $V=\pi(1-\ln 2)$;

15. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent către un număr real a dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia:
a) Pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr natural $N(\epsilon)$ astfel încât $|a_n-a|>\epsilon, \forall n\geq N(\epsilon)$;
b) Există $\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, $|a_n-a|<\varepsilon, \forall n\geq m$;
c) Există un număr natural m astfel încât pentru orice număr real $M>0$ şi pentru orice $n>m$ rezultă $|a_n|\geq M$;
d) Pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât $|a_n-a|<\varepsilon, \forall n\geq N(\varepsilon)$;
e) Există o vecinătate a punctului a notată V_a, care lasă în afara sa o infinitate de termeni ai şirului dat.

TESTUL 2

Marius Macarie[2]

1. Dacă g este inversa funcţiei bijective $f:\mathbb{R}\to(2,\infty), f(x)=5^x+2$, atunci $g(7)$ este egal cu:
a) 2; b) 1; c) -1; d) 0; e) 3.

2. Dacă $A=\{a\in\mathbb{N}\mid(a-2)X^2-aX-3a<0, \forall x\in\mathbb{R}\}$, atunci:
a) $A=\{0,1,2\}$; b) $A=\{0,1\}$; c)$A=(0,\frac{24}{13})$; d) $A=\{1\}$; e) $A=\{0,1,3\}$.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

3. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+14-8\sqrt{x-2}}=3$ este:

   a) 27; b) 12; c) 48; d) 100; e) 54.

4. Dacă $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, atunci z^{2022} este:

   a) 1; b) 0; c) i; d) -1; e) $-i$.

5. Se consideră matricea $A\in M_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}$. Soluţia ecuaţiei $X^{2021}=A$ este:

   a) $X=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt[2021]{7}-\sqrt[2021]{3}}{2}&\frac{\sqrt[2021]{7}+\sqrt[2021]{3}}{2}\\\frac{\sqrt[2021]{7}+\sqrt[2021]{3}}{2}&\frac{\sqrt[2021]{7}-\sqrt[2021]{3}}{2}\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$; c) $X=\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}$; d) $X=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt[2021]{7}+\sqrt[2021]{3}}{2}&\frac{\sqrt[2021]{7}-\sqrt[2021]{3}}{2}\\\frac{\sqrt[2021]{7}-\sqrt[2021]{3}}{2}&\frac{\sqrt[2021]{7}+\sqrt[2021]{3}}{2}\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt[2021]{5}+\sqrt[2021]{2}}{2}&\frac{\sqrt[2021]{5}-\sqrt[2021]{2}}{2}\\\frac{\sqrt[2021]{5}-\sqrt[2021]{2}}{2}&\frac{\sqrt[2021]{5}+\sqrt[2021]{2}}{2}\end{pmatrix}$.

6. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\log_2 x$. Atunci valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ este:

   a) $\ln 2$; b) 1; c) 0; d) $\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\ln 2}$; e) $e^{\frac{\pi}{4}}$.

7. În corpul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ se consideră sistemul $\begin{cases}x+\hat{2}y+\hat{3}z=\hat{3}\\\hat{2}x+y+\hat{4}z=\hat{3}\\\hat{3}x+\hat{4}y+\hat{2}z=\hat{3}\end{cases}$, având soluţia (x_0,y_0,z_0).

   Atunci valoarea $x_0^2+y_0^2+z_0^2$ este:

   a) $\hat{1}$; b) $\hat{0}$; c) $\hat{3}$; d) $\hat{2}$; e) $\hat{4}$.

8. Se consideră polinoamele $f,g,r\in\mathbb{R}[X]$, unde $f=x^{2020}-2X^{1011}+3X+4$, $g=X^3-X$ şi r este restul împărţirii polinomului f la g. Dacă $\alpha=r(-2)$ atunci:

   a) $\alpha=0$; b) $\alpha=12$; c) $\alpha=-1$; d) $\alpha=2020$; e) $\alpha=6$.

9. Pe mulţimea $G=(2020,\infty)$ se defineşte legea de compoziţie " $\circ$ " prin

$$x\circ y=(x-2020)^{\log_2(y-2020)}+2020.$$

   Dacă $A=\{x\in G/\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{\text{de 2020 ori}}=2^{2020^{2020}}+2020\}$ şi $S=\sum\limits_{x\in A}x$, atunci:

   a) $S=2020$; b) $S=0$; c) $S=2^{2020}+2^{-2020}+4040$; d) $S=2^{2020}+2020$; e) 0.

10. Se consideră funcţia bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+4x^3-2x^2+x$ şi $L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$. Atunci:

    a) $L=0$; b) $L=+\infty$; c) $L=1$; d)$L=e$; e) $L=4$.

11. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^{2019}}{x^{2021}+1}$ şi $F:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa cu proprietatea $F(1)=\frac{1}{2021}$. Atunci valoarea integralei $\int_0^1 F(x)dx$ este:

    a) $\frac{1}{2021}\ln\frac{e}{2}$; b) $\frac{1}{2021}\ln 2$; c) 2021; d) 0; e) $\frac{1}{2021}$.

12. Dacă $I=\int_0^2\frac{x}{\sqrt{4x+1}}dx$ atunci:

    a) $I=2\sqrt{2}$; b) $I=\frac{5}{6}$; c) $I=\frac{1}{4}$; d) $I=1$; e) $I=\ln 3$.

13. Limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = (an^3 - 2n^2 + 3)\sin\frac{2n}{3n^4+4n^2-1}$ este egală cu 1 pentru:

a) $a = 1$; b) $a = \frac{2}{3}$; c) $a = 0$; d) $a = \frac{3}{2}$; e) $a = 3$.

14. Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln^2 x}{2}$. Dacă m este numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f, iar n este numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei f şi $S = m + n$ atunci:

a) $S = 1$; b) $S = 2$; c) $S = 3$; d) $S = 0$; e) $S = 4$.

15. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$ este:

a) $I = \pi + \ln\frac{3}{2}$; b) $I = \frac{1}{2}$; c) $I = \frac{1}{13}(\pi + \ln\frac{27}{8})$; d) $I = 0$; e) $I = 1$.

TESTUL 3

D.M.I. [3]

1. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx - 1 = 0\},\ m \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care $A \cap (0,\infty) \neq \emptyset$ este

a) $\mathbb{R}$; b) $\emptyset$; c) $(0,\infty)$; d) $(-\infty, 0)$; e) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

2. Fie $x_1,\ x_2$ rădăcinile ecuaţiei $x^2 - (2m+1)x + m - 2 = 0$. Avem

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{x_1}{x_2} \leq \sqrt{2} + 1,$$

dacă şi numai dacă

a) $m \in [-3, 7]$; b) $m \in (-\infty, 0]$; c) $m \in [0, 2]$; d) $m \in \emptyset$; e) $m \in (0,\infty)$.

3. Valoarea numărului $(1 + i\sqrt{3})^{100} + (1 - i\sqrt{3})^{100}$ este

a) -2^{50}; b) -3^{50}; c) -2^{100}; d) 2^{100}; e) 3^{50}.

4. Dacă $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + n + 1}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$ şi $L_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2 - n + 1}{2n^2 + n + 1}\right)^{n}$, atunci $L_1 + L_2 =$

a) e; b) $\dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{2}$; c) ∞; d) $\dfrac{1}{e}$; e) 1.

5. Termenul cel mai mare din dezvoltarea $\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)^{100}$

a) T_{50}; b) T_{26}; c) T_{25}; d) T_{24}; e) T_{37}.

6. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - ctg^2 x\right)$ este:

a) 1; b) $\dfrac{1}{3}$; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{2}{3}$; e) $\dfrac{4}{3}$.

7. Valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 2 \\ x - 2y + 2z & = & 10 \\ 3x + my + z & = & 7 \end{array}\right.$ este compatibil determinat sunt

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

a) $m \in [-2,2]$; b) $m \in \mathbb{R}$; c) $m \in (-\infty,-3]$; d) $m \in [-3,+\infty]$; e) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

8. Restul împărţirii polinomului $X^n + X^{n-1} + ... + X + 1 \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$, $(n \geq 3)$ la polinomul $X(X-1)(X-2)$ este

a) $(2^n-n-1)X^2+(2n+1-2^n)X+1$; b) $(2^n-n)X^2+(2n-1-2^n)X+1$; c) $X^2-(2^n+1)X+1$; d) X^2+nX+1; e) $2^nX^2+(2n+1)X+1$.

9. $\int\limits_{-1}^{1} \max\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x, 3^x\right\} dx =$

a) $\frac{3}{\ln 4}$; b) $\frac{2}{\ln 3}$; c) $\frac{4}{\ln 3}$; d) 4; e) $\frac{7}{3}$.

10. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci $A + A^2 + ... + A^{10} =$

a) $\begin{pmatrix} 10 & 90 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10 & 110 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Ecuaţia $2x^3 - 9x^2 + 12x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, are trei soluţii reale distincte dacă şi numai dacă

a) $m \in [0,1]$; b) $m \in (-5,-4)$; c) $m \in [-4,\infty)$; d) $m \in (-\infty,-5)$; e) $m \in \mathbb{R}$.

12. Suma cuburilor soluţiei ecuaţiei $\dfrac{\log_2(x-1)}{\log_2(x^2+2x-7)} = \dfrac{1}{3}$ este

a) 7; b) 35; c) 26; d) 27; e) 34.

13. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + 3x\sin^2 x)dx =$

a) $\frac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{\pi^4}{8}$; c) $\frac{\pi^4}{4}$; d) $\frac{\pi^4}{2}$; e) 0.

14. Soluţia ecuaţiei $\dfrac{C_{x+2}^8}{A_{x-2}^4} = \dfrac{57}{16}$ este

a) $x = 17$; b) $x = 19$; c) $x = 14$; d) $x = 8$; e) $x = 6$.

15. $\int\limits_{2}^{3} \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} =$

a) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; b) $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$; e) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

TESTUL 4

Raluca Mihaela Georgescu[4]

1. Valoarea parametrului real m pentru care punctul $A(6,m)$ aparţine mediatoarei segmentului $[AB]$, cu $A(1,2)$ şi $B(5,8)$ este:
a) 4; b) 2; c) 6; d) 7; e) 1.
2. Se dau vectorii: $\overrightarrow{u} = -3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{w} = -4\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$. Atunci vectorul $2(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) - 5\overrightarrow{w}$ este:
a) $10\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j}$; b) $10\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j}$; c) $-10\overrightarrow{i} + 18\overrightarrow{j}$; d) $12\overrightarrow{i} - 10\overrightarrow{j}$; e) $12\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j}$.
3. Aria triunghiului ABC cu $AB = \sqrt{3}+1$, $AC = 4\sqrt{2}$ şi $m(\sphericalangle A) = 15°$ este:
a) $\sqrt{3}+2$; b) $2(\sqrt{3}+2)$; c) 2; d) 4; e) $\sqrt{3}+1$.
4. Valoarea expresiei $E(x) = 4\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] - 2$ pentru $x = \frac{\pi}{4}$ este
a) 0; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{2}-\sqrt{6}$; d) $\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$; e)1.

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, gemiral@yahoo.com

5. În sistemul de axe ortogonale XOY se consideră triunghiul ABC, cu $A(2,-3)$, $B(3,5)$, $C(-1,4)$. Ecuaţia înălţimii din A este:
a) $x-2y+5=0$; b) $4x+y-5=0$; c) $3x+4y-7=0$; d)$-4x+2y-3=0$; e) $4x+2y-5=0$.
6. Valoarea pozitivă a parametrului real a pentru care vectorii $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ sunt perpendiculari, unde $\overrightarrow{u}=2a\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v}=-4\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}$ este
a) $2\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{3}$; c) $3\sqrt{2}$; d) 1; e) 4.
7. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB=5$, $AC=2\sqrt{2}$ şi $\mathrm{tg}(\hat{A})=7$. Atunci lungimea laturii BC este
a) 5; b) $\sqrt{5}$; c) 4 ; d) $\sqrt{10}$; e) 6.
8. Aria triunghiului determinat de intersecţia dreptelor de ecuaţii $2x-3y+11=0$, $x+2y-12=0$ şi $-x+5y-16=0$ este
a) 3; b) $\frac{7}{2}$; c) $\frac{5}{2}$; d) 4; e) 2.
9. Dacă $\sin x=\dfrac{4}{5}$ şi $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, atunci $\mathrm{ctg}\, x$ este
a) -3 ; b) $\dfrac{3}{4}$; c)$-\dfrac{3}{4}$; d) $\dfrac{4}{3}$; e) $-\dfrac{4}{3}$.
10. Coordonatele ortocentrului triunghiului ABC, cu $A(6,-2)$, $B(2,1)$, $C(4,2)$ sunt:
a) $H(4,2)$; b) $H(-4,2)$; c) $H(4,-2)$; d) $H(2,4)$; e) $H(-2,2)$.
11. Un triunghi dreptunghic isoscel are ipotenuza egală cu $6\sqrt{2}$. Lungimea medianei corespunzătoare unei catete este
a) 4; b) 3 ; c) $3\sqrt{5}$; d) $6\sqrt{2}$; e) $3\sqrt{3}$.
12. Aria triunghiului ABC cu $AB=\sqrt{10}$, $AC=4$ şi $\mathrm{tg}\,(B+C)=3$ este
a) 6; b) $2\sqrt{10}$; c) 3; d) 5; e) 4.
13. Dacă în triunghiul ABC se cunosc $AC=4$, $BC=6$ şi $\cos(2A)=\dfrac{7}{8}$, atunci $\sin B$ este:
a) $\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; c) $-\dfrac{1}{6}$; d) $\dfrac{1}{6}$; e) $\dfrac{1}{4}$.
14. Coordonatele punctului C de pe axa OX care aparţine dreptei ce trece prin punctele $A(2,1)$ şi $B(-1,2)$ sunt:
a) $C(-5,0)$; b) $C(5,0)$; c) $C(0,-4)$; d) $C(3,0)$; e) $C(0,3)$.
15. Soluţia ecuaţiei $\sin x+\cos x=0$, pentru $x\in(0,2\pi)$ este:
a) $S=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right\}$; b) $S=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6}\right\}$; c) $S=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{4\pi}{3}\right\}$; d) $S=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{5\pi}{3}\right\}$;
e) $S=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Cătălina Enescu [1]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare științe ale naturii

◦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
◦ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
◦ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Indicați o expresie C/C++ care are valoarea 1 dacă și numai dacă numărul natural memorat în variabila întreagă `x` are exact două cifre. **(4p.)**

   a) `x/100!=0 || x/10==0` c) `x%100!=0 || x%10==0`
   b) `x/100==0 && x/10!=0` d) `x%100==0 && x%10!=0`

2. Pentru a verifica dacă în tabloul unidimensional (3,6,9,15,16,20,25) există elementul cu valoarea `x`=18 se aplică metoda căutării binare. Succesiunea de elemente a căror valoare se compară cu `x` pe parcursul aplicării metodei este: **(4p.)**

   a) 4,16,20 b) 15,20,16 c) 15,16,20 d) 4,9,16,27

3. Variabilele `i` și `j` sunt de tip întreg. Indicați expresia care poate înlocui zona punctată astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze pe ecran valorile alăturate secvenței. **(4p.)**

```
for(i=0;i<4;i++)
{ for(j=0;j<5;j++)
      cout<<.........<<" "; |
      printf("%d ",.........);
  cout<<endl; | printf("\n");
}
```

```
20 16 12 8 4
19 15 11 7 3
18 14 10 6 2
17 13  9 5 1
```

   a) `20-4*i-j` b) `20-4*i+j` c) `20-i-4*j` d) `20-i+4*j`

4. O expresie C/C++ care are valoarea 20 este: **(4p.)**

[1] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Cantacuzino”, Pitești, catalina.enescu@yahoo.com

a) `abs(2)`
b) `ceil(19.75)`
c) `floor(19.25)`
d) `pow(10,2)`

5. În secvenţa de instrucţiuni alăturată, toate variabilele sunt de tip întreg. O expresie care poate înlocui punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenţei, variabila `m` să aibă o valoare egală cu cel mai mare divizor comun al numerelor 2020 şi 1020 este: **(4p.)**

```
m=2020; n=1020;
while (...)
{
  x=m%n;
  m=n;
  n=x;
}
```

a) `m!=0` b) `m%n!=0` c) `n!=0` d) `n!=m`

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Algoritmul următor este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii valorii naturale a variabilei `a` la valoarea naturală a variabilei `b`.

```
citeste x (numar natural)
nr ← 0
cat timp x≠0 executa
|   citeste y (numar natural)
|   daca x%2=y%2 atunci
|   |_ nr ← nr+1
|_  x ← y
scrie nr
```

a) Ce se va afișa pentru șirul de valori 2 4 6 5 7 4 3 0? **(6p.)**
b) Dați un exemplu de șir de cel puțin două valori pentru care valoarea afișată va fi 0. **(6p.)**
c) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat structura `cat timp...executa` cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**
d) Scrieți un program C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Variabilele întregi `v1`,`v2` și `v3` memorează, pentru fiecare dintre cei trei porumbei aflați într-o volieră, vârsta acestora. Scrieți o secvență de instrucțiuni în urma executării căreia să se afișeze pe ecran vârstele celor trei porumbei, în ordine crescătoare, separate prin câte un spațiu. **(6p.)**

3. Variabila `i` este de tip întreg, iar variabila `c` este de tip char. Scrieți ce se afișează în urma executării secvenței de program alăturate. **(6p.)**

```
for(i=1;i<=7;i++)
{
 if(i<=3) c='a'+(1+i/2)*(i%2);
 else c='0'+(1-i%2)*2;
 cout<<c; | printf("%c",c);
}
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citește un număr natural `n` și se cere să se scrie cea mai mare cifră impară din scrierea acestuia în baza 10, sau -1 dacă nu există astfel de cifre. Scrieți, în pseudocod, algoritmul de rezolvare a problemei enunțate. **(10p.)**
Exemplu: pentru n=5672883 se scrie 7.

2. Scrieţi un program C/C++ care citeşte de la tastatură un număr natural, n (n∈[2,100]), apoi cele `n` elemente ale unui tablou unidimensional, numere reale din intervalul [-100,100], dintre care cel puțin unul este pozitiv și cel puțin unul este negativ. Programul transformă în memorie tabloul, înlocuind fiecare număr negativ cu valoarea sa absolută, apoi afişează pe ecran elementele tabloului obţinut. **(10p.)**
Exemplu: pentru `n`=10 și tabloul (2,5,2,4,-3,4,-2,-7,-2,9) se obține (2,5,2,4,3,4,2,7,2,9).

3. Fișierul **bac.in** conține, în ordine crescătoare, cel mult 10^6 numere naturale din intervalul [0,10^9], separate prin câte un spațiu. Se cere să se afișeze pe ecran, în ordine strict crescătoare, separate prin câte un spațiu, numerele distincte care apar în fișier. Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare.
Exemplu: dacă fișierul conține numerele 5 5 6 7 8 8 8 8 10 15 16 16 25 25 49 pe ecran se afișează, în această ordine, numerele 5 6 7 8 10 15 16 25 49
   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

Testul 2

Cătălina Enescu [2]

Limbajul Pascal

Filieră teoretică, profil real, specializare științe ale naturii

○ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
○ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
○ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Indicați o expresie Pascal care are valoarea `true` dacă și numai dacă numărul natural memorat în variabila întreagă `x` are exact două cifre. **(4p.)**
   a) `x div 100 <> 0 or x div 10 = 0`
   b) `x div 100 =0 and x div 10 <> 0`
   c) `x mod 100 <> 0 or x mod 10 = 0`
   d) `x mod 100 =0 and x mod 10 <> 0`

2. Pentru a verifica dacă în tabloul unidimensional (3,6,9,15,16,20,25) există elementul cu valoarea `x`=18 se aplică metoda căutării binare. Succesiunea de elemente a căror valoare se compară cu `x` pe parcursul aplicării metodei este: **(4p.)**
   a) 4,16,20 b) 15,20,16 c) 15,16,20 d) 4,9,16,27

3. Variabilele `i` și `j` sunt de tip întreg. Indicați expresia care poate înlocui zona punctată astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze pe ecran valorile alăturate secvenței. **(4p.)**

[2] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Cantacuzino”, Pitești, catalina.enescu@yahoo.com

```
for i:=0 to 3 do
begin
  for j:=0 to 4 do
        write(.........,' ');
   writeln;
end;
```

20 16 12 8 4
19 15 11 7 3
18 14 10 6 2
17 13 9 5 1

a) `20-4*i-j` b) `20-4*i+j` c) `20-i-4*j` d) `20-i+4*j`

4. O expresie Pascal care are valoarea 20 este: **(4p.)**

   a) `abs(2)`
   b) `round(19.75)`
   c) `trunc(19.25)`
   d) `sqr(10)`

5. În secvenţa de instrucţiuni alăturată, toate variabilele sunt de tip întreg. O expresie care poate înlocui punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenţei, variabila `m` să aibă o valoare egală cu cel mai mare divizor comun al numerelor 2020 şi 1020 este: **(4p.)**

```
m:=2020; n:=1020;
while ... do
begin
   x := m mod n;
   m := n;
   n := x;
end;
```

   a) `m<>0` b) `m mod n<>0` c) `n<>0` d) `n<>m`

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Algoritmul următor este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii valorii naturale a variabilei `a` la valoarea naturală a variabilei `b`.

```
citeste x (numar natural)
nr ← 0
cat timp x<>0 executa
|   citeste y (numar natural)
|   daca x mod 2=y mod 2 atunci
|   |_ nr ← nr+1
|_  x ← y
scrie nr
```

   a) Ce se va afișa pentru șirul de valori 2 4 6 5 7 4 3 0? **(6p.)**
   b) Dați un exemplu de șir de cel puțin două valori pentru care valoarea afișată va fi 0. **(6p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat structura `cat timp...executa` cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**
   d) Scrieți un program Pascal corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Variabilele întregi `v1`,`v2` și `v3` memorează, pentru fiecare dintre cei trei porumbei aflați într-o volieră, vârsta acestora. Scrieți o secvență de instrucțiuni în urma executării căreia să se afișeze pe ecran vârstele celor trei porumbei, în ordine crescătoare, separate prin câte un spațiu. **(6p.)**

3. Variabilele `x` și `y` sunt de tip `char`, iar celelalte variabile sunt de tip întreg. Scrieți ce se afișează în urma executării secvenței date. **(6p.)**

```
k:=ord('A')-ord('a'); x:='e';
for i:=0 to 1 do
begin
  y:=chr(ord(x)+k+1);
  write(x,y);
  x:=chr(ord(x)-1);
end;
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citește un număr natural `n` și se cere să se scrie cea mai mare cifră impară din scrierea acestuia în baza 10, sau -1 dacă nu există astfel de cifre. Scrieți, în pseudocod, algoritmul de rezolvare a problemei enunțate. **(10p.)**
   Exemplu: pentru n=5672883 se scrie 7.

2. Scrieţi un program Pascal care citeşte de la tastatură un număr natural, n (n∈[2,100]), apoi cele `n` elemente ale unui tablou unidimensional, numere reale din intervalul [-100,100], dintre care cel puțin unul este pozitiv și cel puțin unul este negativ. Programul transformă în memorie tabloul, înlocuind fiecare număr negativ cu valoarea sa absolută, apoi afişează pe ecran elementele tabloului obţinut. **(10p.)**
   Exemplu: pentru `n`=10 și tabloul (2,5,2,4,<u>-3</u>,4,<u>-2</u>,-7,<u>-2</u>,9) se obține (2,5,2,4,<u>3</u>,4,<u>2</u>,7,<u>2</u>,9).

3. Fișierul **bac.in** conține, în ordine crescătoare, cel mult 10^6 numere naturale din intervalul [0,10^9], separate prin câte un spațiu. Se cere să se afișeze pe ecran, în ordine strict crescătoare, separate prin câte un spațiu, numerele distincte care apar în fișier. Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare.
   Exemplu: dacă fișierul conține numerele 5 5 6 7 8 8 8 8 10 15 16 16 25 25 49 pe ecran se afișează, în această ordine, numerele 5 6 7 8 10 15 16 25 49
   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul Pascal corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Nicoleta Voica [1], *Adrian Voica* [2]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

○ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
○ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
○ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
○ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabilele `a` și `b` sunt de tip întreg. Care dintre următoarele expresii C/C++ au valoarea 1 dacă şi numai dacă `a` și `b` sunt numere consecutive de aceeași paritate? **(4p.)**

   a) `(a+b)%2==0`
   b) `a*b%2==0 || a*b%2!=0`
   c) `a-b==2 || b-a==2`
   d) `a-b==2 && b-a==2`

2. Utilizând metoda backtracking, sunt generate șiruri de `n` litere distincte ale alfabetului englez, astfel încât două vocale sau două consoane să nu fie alăturate (vecine). Pentru `n`=3 primele 4 soluții sunt: `abe`, `abi`, `abo`, `abu`. Să se precizeze care sunt șirurile generate imediat înainte şi după secvenţa următoare: `uza`, `uze`, `uzi`, `uzo`. **(4p.)**

   a) `uya`, `vab`
   b) `uyo`, `uzu`
   c) `oyu`, `vax`
   d) `uyo`, `vab`

3. Fie următorul subprogram recursiv:

```
int bac (int k)
{ if (k==0) return 0;
  if (k%2==0) return bac(k-1)-(k-1);
  return bac(k-1)+k;
}
```

   Ce se va afişa în urma apelurilor: `cout<<bac(7); | printf("%d",bac(7));` respectiv `cout<<bac(100); | printf("%d",bac(100));`? **(4p.)**

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Ion C. Brătianu", Pitești, nvoica71@yahoo.fr
[2] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Barbu", Pitești, avoica71@yahoo.com

a) 0 0 b) 7 0 c) 7 100 d) 28 5050

4. Se consideră graful neorientat cu n=5 noduri, reprezentat prin următoarea matrice de adiacență:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Care dintre următoarele secvențe de noduri reprezintă un lanț elementar în graf? **(4p.)**

a) 2 1 3 4 5 b) 3 4 3 2 5 4 c) 3 1 2 3 5 d) 4 3 1 2 5 4

5. Se consideră un tablou unidimensional `v` cu `n` elemente numere reale, numerotate de la 1 la `n`. Ce efect produce asupra tabloului următoarea secvență de instrucțiuni, unde `i,k`$\in \mathbb{N}^*, 1 \leq$ `k` $\leq$ `n-2`? **(4p.)**

```
for (i=k;i<n-1;i++) v[i]=v[i+2]; n=n-2;
```

a) permută cu o poziție la stânga elementele vectorului;
b) elimină două elemente de pe poziții consecutive, începând cu cel de pe poziția `k`;
c) permută cu două poziții la stânga elementele vectorului;
d) permută la stânga elementele vectorului începând cu poziția `k` până la sfârșit.

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Se consideră algoritmul următor, scris în pseudocod.

```
citeste x (numar intreg)
m ← 0
nr ← 1
y ← x
cat timp y≠0 executa
|    citeste y (numar intreg)
|    daca y=x atunci
|    |   nr ← nr+1
|    |altfel
|    |   daca nr≥m atunci
|    |   |   m ← nr
|    |   |_  z ← x
|    |   x ← y
|_   |_  nr ← 1
scrie m,z
```

a) Scrieţi ce valori vor fi afişate dacă se citesc pe rând valorile: 9 2 1 1 2 3 3 3 3 8 4 4 4 0. **(6p.)**
b) Precizaţi o secvență de numere ce pot fi citite astfel încât să se afişeze pentru `z` ultima valoare nenulă citită. **(6p.)**
c) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat care să utilizeze altă structură repetitivă. **(6p.)**
d) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Se consideră un șir de caractere care conține maxim 50 caractere litere ale alfabetului englez. Să se scrie o secvență de program C/C++ care modifică șirul astfel încât toate vocalele din șir să se găsească la sfârșitul șirului de caractere, în ordinea în care apar în șirul inițial.

Exemplu: pentru șirul `examen` se va obține `xmneae`. **(6p.)**

3. Fie următoarea definiție care reprezintă un unghi dat prin grade, minute și secunde:

```
struct unghi
{int g, m, s;};
```

și declarația:

```
struct unghi u1, u2, u;
```

Să se scrie o secvență de program C/C++ care determină în variabila `u` suma unghiurilor `u1` și `u2`. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Scrieţi un program în C/C++ care citeşte elementele întregi ale unui tablou bidimensional `x` cu `n` linii numerotate de la `1` la `n` și `m` coloane numerotate de la `1` la `m` (`n`, `m` numere naturale nenule, `n`, `m`<15) și determină și afișează media aritmetică a elementelor `x[i][j]` din tablou care îndeplinesc proprietatea că `i+j=k`, unde `k`$\in \mathbb{N}^*$, `k`$\leq$`n+m`, citit de la tastatură. Rezultatul se va afișa cu două zecimale. **(10p.)**

   Exemplu: pentru `n`=4, `m`=4 şi `k`=5 și tabloul $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & -9 \\ 3 & -8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, se va afișa 2.50 ((9+4-6+3)/4).

2. Un număr se numește super multiplu de `k` dacă atât numărul, cât și toate prefixele sale sunt multipli de `k`.

   Exemplu: `n`=846 este supermultiplu de `k`=2, deoarece 846, 84, 8 sunt multipli ai numărului 2.

   a) Scrieţi definiţia completă a subprogramului **bac** cu doi parametri: `n` și `k` numere natural nenule, care primeşte prin intermediul acestora două numere naturale de maxim 9 cifre fiecare. Subprogramul returnează valoarea 1 dacă numărul `n` este supermultiplu de `k` şi 0 în caz contrar. **(6p.)**

   b) Scrieţi un program C/C++ care citeşte de la tastatură 3 numere naturale nenule `a`, `b` și `c`, de maxim 9 cifre fiecare, apoi folosind apeluri utile ale subprogramului de la punctul a) determină şi afişează pe ecran toate numerele din intervalul închis determinat de `a` și `b` care sunt supermultipli de c. În cazul în care nu există în interval numere supermultipli de `c`, se va afişa un mesaj corespunzător. **(4p.)**

   Exemplu: pentru `a`=50, `b`=1000 şi `c`=7, se vor afişa numerele 70, 77, 700, 707, 770, 777.

3. Fişierul text **bac.in** conţine pe primul rând două numere natural nenule, `n` și `k`, `n`$\leq$10000, `k`$\leq$`n`, iar pe al doilea rând `n` numere reale.

   a) Folosind un algoritm eficient din punct de vedere al timpului de executare, scrieţi un program C/C++ care citeşte numerele din fişier şi determină numărul de secvențe de lungime `k` de numere de pe al doilea rând din fișier care încep și se termină cu aceeași valoare. Rezultatul se va afişa pe ecran, iar dacă în fișier nu există nicio secvență cu această proprietate, se va afişa un mesaj corespunzător. **(6p.)**

   Exemplu: dacă fişierul **bac.in** are următorul conţinut:

   12 3

   3 2 9 6 9 15 -3 15 -3 16 24 31

   se va afişa 3 (9 6 9; 15 -3 15; -3 15 -3).

   b) Descrieţi în limbaj natural metoda utilizată justificând eficienţa acesteia. **(4p.)**

Testul 2

Maria Tătulea [3]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

◦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
◦ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
◦ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
◦ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabila `n` reprezintă un număr natural cu exact 2 cifre. Care dintre expresiile următoare are valoarea 1 dacă și numai dacă cifrele lui `n` au paritate diferită? **(4p.)**

   a) `n/2==n%2` c) `!n/10%2!=n%2`
   b) `n/10==n%10` d) `(n/10+n%10*10)%2==n%2`

2. Se consideră următoarea funcție

```
void f(int x, int y)
{   if(x*y)
    {   if(x%3)
        cout<<x<<" "; | printf("%d ",x);
        f(x-1,y-1);
        cout<<y<<" "; | printf("%d ",y);
    }
    cout<<(x+y)/2<<" "; | printf("%d ",(x+y)/2);
}
```

   Câte valori se afișează în urma apelului f(4,3)? **(4p.)**

   a) 0 b) 9 c) 8 d) 1

3. Utilizând metoda backtracking se generează toate șirurile de cel puțin 2 și cel mult 4 elemente disticte din mulțimea 1,2,3,4,5,6. Care este a 10-a soluție? **(4p.)**

   a) 2,4 b) 1,2,5,4 c) 1,3,4,5 d) 1,3

4. Fie un arbore cu 5 noduri. Care dintre șirurile de mai jos poate reprezenta șirul gradelor nodurilor acestui arbore? **(4p.)**

   a) 1 0 2 0 2 b) 1 1 1 0 1 c) 1 1 2 0 4 d) 2 3 1 1 1

5. Se consideră un graf neorientat corespunzător matricei de adiacență:

[3] Profesor, Colegiul Național ,,Dinicu Golescu", Câmpulung, mariatatulea@yahoo.com

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Câte muchii trebuie adăugate pentru a se obține un graf eulerian și hamiltonian? **(4p.)**

a) 1 b) 2 c) 3 d) imposibil

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Algoritmul următor este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `[c]` partea întreagă a numărului real `c`.

```
citeste n,x (numere naturale)
d ← x
pentru i←1,n-1 executa
| citeste y (numar natural)
| daca y≠0 atunci
| | ok ← 0
| | cat timp d≤x*y si ok=0 executa
| | | daca [d/x]*x=d si [d/y]*y=d atunci
| | | |  ok ← 1
| | | |altfel
| | | |_ d ← d+1
| | |_
| |_
|_ x ← d
scrie x
```

a) Scrieţi valoarea afişată dacă se citesc, în această ordine, numerele 5, 8, 24, 16, 64, 192. **(6p.)**

b) Dacă pentru `n` se citește valoarea 3, daţi exemplu de un set de date de intrare astfel încât, în urma executării algoritmului, valoarea afișată să fie egală cu 225. **(6p.)**

c) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

d) Scrieţi în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuid structura **cât timp.......execută** cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**

2. Variabila `t` memorează simultan următoarele date despre fiecare dintre 20 de triunghiuri din plan: cele 3 segmente ce reprezintă laturile triunghiului din plan. Știind că expresiile de mai jos au ca valori numere reale și reprezintă coordonatele punctelor de la extremitățile primului segment al primului triunghi, scrieți definiția unei structuri cu eticheta `triunghi`, care permite memorarea datelor despre un triunghi, și declarați corespunzător variabila `t`. **(6p.)**

a) `t[0].s[0].a.x` c) `t[0].s[0].b.x`

b) `t[0].s[0].a.y` d) `t[0].s[0].b.y`

3. Variabilele `i` şi `j` sunt de tip întreg, iar variabila `a` memorează un tablou bidimensional cu 6 linii şi 6 coloane, numerotate de la 0 la 5, având iniţial toate elementele nule. Fără

a utiliza alte variabile decât cele menţionate, scrieţi secvenţa de instrucţiuni următoare, înlocuind punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenţei obţinute, variabila `a` să memoreze tabloul alăturat. **(6p.)**

```
for(i=0;i<=5;i++)
    for(j=0;j<=5;j++)
        ............
```

1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Scrieţi definiţia completă a unui subprogram **calcul** cu doi parametri:
   - `n`, prin care primeşte un număr natural ($1 \leq n \leq 10^9$);
   - `x`, prin care furnizează media aritmetică a cifrelor impare ale numărului `n`, sau -1 dacă acesta nu are cifre impare.

   Exemplu: pentru `n`=3254, după apel, `x` va avea valoarea 4, iar pentru `n`=246, după apel, `x` va avea valoarea -1. **(10p.)**

2. Un şir cu maximum 255 de caractere conţine cuvinte formate numai din litere mici ale alfabetului englez. Cuvintele sunt despărţite prin unul sau mai multe spaţii, virgulă sau punct. Scrieţi un program C/C++ care citeşte un astfel de şir și afișează pe ecran, separate printr-un singur spatiu, cuvintele din șir care au aceleași consoane ca și primul cuvânt, în aceeași ordine dar nu neapărat pe aceleași poziții. **(10p.)**

   Exemplu: pentru şirul
   mara are un borcan cu miere, rame si cirese amare
   se va afişa
   mara miere amare

3. Numim secvență **munte** a unui șir de numere naturale un subșir al acestuia, format din termeni aflați pe poziții consecutive în șirul dat, cu proprietatea că formează un șir nevid strict crescător până la un moment dat, apoi formează un șir nevid strict descrescător. Lungimea secvenței este egală cu numărul de termeni ai acesteia. O secvență **munte** are cel puțin 3 elemente.

   Fișierul bac.txt conține un șir de cel mult 10^9 numere naturale din intervalul $[0,10^9]$. Numerele sunt separate prin câte un spațiu. Se cere să se afișeze pe ecran lungimea maximă a unei secvențe **munte** și numărul de secvențe **munte** din șir. Cele două valori se vor afișa pe o singură linie, separate printr-un spațiu. Proiectați un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei și al timpului de executare.

   Exemplu: dacă fișierul bac.txt conține numerele

   1,2,3,4,3,2,2,4,3,1,1,4,6,1

   atunci pe ecran se va afișa 6 3.

   a) Scrieţi programul C/C++ corespunzător. **(8p.)**
   b) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 4

Clasa a IX-a

M 101. *Determinați șirurile* $(a_n)_{n\geq 0}$ *cu proprietatea că*

$$a_n(1-a_{n+1}) \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}(1-a_n),\ \forall\, n \geq 0.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, din $a_n(1-a_{n+1}) \leq a_{n+1}(1-a_n)$ rezultă că $a_n \leq a_{n+1}$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este crescător. Cum $a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_n a_{n+1}$, rezultă că $a_n a_{n+1} \leq a_{n+1} - a_{n+2}$, prin urmare $a_n a_{n+1} \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n > 0$, ar rezultă că $a_{n+1} \geq a_n > 0$, de unde $a_n a_{n+1} > 0$, contradicție. Prin urmare $a_n \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n < 0$, ar rezultă că $a_{n-1} \leq a_n < 0$, de unde $a_{n-1}a_n > 0$, contradicție. Astfel obținem că $a_0 \leq 0$ și $a_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, șir ce verifică proprietatea din enunț.

M 102. *Fie* $a, b, c > 1$ *astfel încât* $a + b + c = 2019$. *Demonstrați inegalitățile:*

a) $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} \geq \dfrac{1}{224}$;

b) $abc + 2 \cdot 673^2 \leq 225(ab + bc + ca)$.

Sorin Ulmeanu, Pitești

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). a) Cu *forma Titu Andreescu* a *Inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz*, avem $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} \geq \dfrac{(1+1+1)^2}{(a-1)+(b-1)+(c-1)} = \dfrac{9}{2016} = \dfrac{1}{224}$.

b) Prelucrăm membrul stâng al inegalității de la a). Obținem $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} = \dfrac{3 - 2\,(a+b+c) + (ab+bc+ca)}{abc - (ab+bc+ca) + (a+b+c) - 1} = \dfrac{(ab+bc+ca) - 4035}{abc - (ab+bc+ca) + 2018}$. Astfel avem, succesiv: $\dfrac{(ab+bc+ca) - 4035}{abc - (ab+bc+ca) + 2018} \geq \dfrac{1}{224}$; $224\,(ab+bc+ca) - 903840 \geq abc - (ab+bc+ca) + 2018$; $225\,(ab+bc+ca) \geq abc + 905858$; $abc + 2 \cdot 673^2 \leq 225\,(ab+bc+ca)$.

M 103. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ *astfel încât* $(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2$. *Arătați că* $(n-1)\left(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3\right)^2 \geq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^3$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Inegalitatea este evidentă dacă toate numerele a_i sunt 0. Presupunem acum că nu toate numerele a_i sunt 0. Conform *Inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz* avem

$$\left(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\right)\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\geq\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^2,$$

deci $(n-1)\left(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\right)^2\geq\dfrac{(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^4}{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2}$. Cum, conform ipotezei,

$$\frac{(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^4}{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2}\geq\frac{(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^4}{(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}=\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^3,$$

rezultă inegalitatea din enunț. Remarcăm că dacă unul dintre numerele a_i este 0 și celelalte $n-1$ sunt egale, atunci inegalitatea devine egalitate.

M 104. *În triunghiul ABC se consideră înălțimile BE și CF, unde $E\in(AC)$, $F\in(AB)$ și fie $D\in(BC)$ astfel încât $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.*

a) Arătați că $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AC^2}{AB^2}$.

b) Dacă AD este înălțime, mediană sau bisectoare, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. a) Fie $\dfrac{AE}{EC}=k_1$, $\dfrac{AF}{FB}=k_2$ și $\dfrac{BD}{DC}=\alpha$. Avem $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{1+k_1}\overrightarrow{BA}+\dfrac{k_1}{1+k_1}\overrightarrow{BC}=\dfrac{k_1}{1+k_1}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}=\dfrac{k_2}{1+k_2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{AB}-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{AC}$. Cum $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ și $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari, rezultă că $\dfrac{k_2}{1+k_2}-1=-\dfrac{1}{1+\alpha}$ și $\dfrac{k_1}{1+k_1}-1=-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$, deci $k_2=\alpha$, (1), și $k_1k_2=1$, (2). Dar $\triangle AEF\sim\triangle ABC$ (deoarece patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil), deci notând $\dfrac{AF}{b}=\dfrac{AE}{c}=x$ avem $AF=xb$ și $AE=xc$, (3). Din (2) rezultă $\dfrac{AE}{b-AE}\cdot\dfrac{AF}{c-AF}=1$, deci conform (3) obținem $x^2bc=bc-b^2x-c^2x+x^2bc$, prin urmare $x=\dfrac{bc}{b^2+c^2}$, $AF=\dfrac{b^2c}{b^2+c^2}$, $FB=c-\dfrac{b^2c}{b^2+c^2}=\dfrac{c^3}{b^2+c^2}$. Utilizând și (1) obținem $\dfrac{BD}{DC}=\alpha=k_2=\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{b^2}{c^2}$.

b) Dacă AD este înălțime, conform *Teoremei lui Ceva* avem $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$, adică $k_2\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{k_1}=1$, deci $\alpha^3=1$. Rezultă că $\alpha=1$, deci $k_1=k_2=1$. Astfel BE și CF sunt și înălțimi și mediane, deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Dacă AD este mediană, rezultă că $\alpha=1$, deci din nou avem $k_1=k_2=1$ și astfel $\triangle ABC$ este echilateral.

Dacă AD este bisectoare, conform *Teoremei bisectoarei* rezultă că $\alpha=\dfrac{c}{b}$, deci, conform a), $\dfrac{c}{b}=\dfrac{b^2}{c^2}$. Prin urmare $b=c$, deci AD este și înălțime și astfel, conform demonstrației de mai sus, $\triangle ABC$ este echilateral.

M 105. *Demonstrați că în orice triunghi ABC avem*

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\right)\leq\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\leq\frac{2r}{3R}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}\right).$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Avem $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}$, (1).
Cum $\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$, obținem $\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}$, (2).

Conform (1) și (2), prima inegalitate din enunț devine $\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\geq\frac{4r^2}{3R^2}\cdot\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}$, adică $p^2\left(3R-8r\right)\geq r\left(18R^2-55Rr-16r^2\right)$.

Cazul 1. $3R-8r\geq 0$. Folosind *Inegalitatea lui Gerretsen* $p^2\geq 16Rr-5r^2$, este suficient să arătăm că $\left(16Rr-5r^2\right)\left(3R-8r\right)\geq r\left(18R^2-55Rr-16r^2\right)$, adică $15R^2-44Rr+28r^2\geq 0$, adică $(R-2r)(15R-14r)\geq 0$, adevărată conform *Inegalității lui Euler* $R\geq 2r$.

Cazul 2. $3R-8r<0$. Folosind *Inegalitatea lui Gerretsen* $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$, este suficient să arătăm că $\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(3R-8r\right)\geq r\left(18R^2-55Rr-16r^2\right)$, adică $6R^3-19R^2r+16Rr^2-4r^3\geq 0$, adică $(R-2r)(2R-r)(3R-2r)\geq 0$, adevărată conform *Inegalității lui Euler.*

Conform (1) și (2), a doua inegalitate din enunț devine $\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\leq\frac{2r}{3R}\cdot\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}$, adică $p^2\geq 14Rr-r^2$. Folosind din nou *Inegalitatea lui Gerretsen* $p^2\geq 16Rr-5r^2$, este suficient să arătăm că $16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2$, adică $R\geq 2r$, care este chiar *Inegalitatea lui Euler.*

Remarcăm că fiecare dintre cele două inegalități devine egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Clasa a X-a

M 106. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația* $\ln\left((n+1)x-2n\right)=(n+1)\ln x-n\ln 2$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Condiția de existență: $x>\frac{2n}{n+1}$. Ecuația este echivalentă cu $(n+1)\,x=2n+\frac{x^{n+1}}{2^n}$. Dar, aplicând *Inegalitatea mediilor*, avem

$$2n+\frac{x^{n+1}}{2^n}=\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n\text{ termeni}}+\frac{x^{n+1}}{2^n}\geq(n+1)\sqrt[n+1]{2^n\cdot\frac{x^{n+1}}{2^n}}=(n+1)\,x.$$

Cum avem egalitate, se obține soluția unică $x=2$.

M 107. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Aflați $(a, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = a \geq \sqrt{2}$ și $az^{n+1} - z^n - a^n = 0$.*

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Avem $z^n(az - 1) = a^n$, deci $|z|^n \cdot |az - 1| = |a|^n$. Dar $|z| = a \geq \sqrt{2}$, deci $|az - 1| = 1$. Astfel $|az - 1|^2 = 1$, deci $(az - 1)(a\overline{z} - 1) = 1$. Rezultă că $a^2|z|^2 - az - a\overline{z} = 0$, adică $a^4 - az - a\overline{z} = 0$, deci $z + \overline{z} = a^3$. Notând $z = x + yi$, cu $x, y \in \mathbb{R}$, rezultă că $x = \dfrac{a^3}{2}$, deci $z = \dfrac{a^3}{2} + yi$. Cum $|z| = a$, avem $\dfrac{a^6}{4} + y^2 = a^2$, deci $y^2 = \dfrac{a^2(2 - a^2)(2 + a^2)}{4}$. Dar $y^2 \geq 0$, deci $a^2 \leq 2$. Cum, din ipoteză, $a \geq \sqrt{2}$, rezultă că $a = \sqrt{2}$, deci $y = 0$ și astfel $z = \sqrt{2}$. Obținem că $(a, z) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, pereche ce verifică relațiile din enunț.

M 108. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ și $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Determinați cel mai mic număr natural k astfel încât orice submulțime cu k elemente a mulțimii U_n să conțină patru elemente cu suma egală cu zero.*

Marin Ionescu, Pitești

Soluție. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in U_n$ distincte astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Avem $|z_1| = 1$, deci $\overline{z_1} = \dfrac{1}{z_1}$ și, analog, $\overline{z_2} = \dfrac{1}{z_2}$, $\overline{z_3} = \dfrac{1}{z_3}$, $\overline{z_4} = \dfrac{1}{z_4}$. Rezultă că $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} + \dfrac{1}{z_4} = 0$, adică $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} + \dfrac{z_3 + z_4}{z_3 z_4} = 0$, și cum $z_3 + z_4 = -(z_1 + z_2)$ obținem că $(z_1 + z_2)(z_1 z_2 - z_3 z_4) = 0$, deci $z_1 + z_2 = 0$ sau $z_1 z_2 = z_3 z_4$.

Dacă $z_1 + z_2 = 0$, rezultă și $z_3 + z_4 = 0$, deci $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \{z_1, -z_1, z_3, -z_3\} \subseteq U_n$.

Dacă $z_1 z_2 = z_3 z_4$, notând $z_1 z_2 = (-z_3)(-z_4) = p$ și $z_1 + z_2 = (-z_3) + (-z_4) = s$, rezultă că z_1, z_2 respectiv $-z_3, -z_4$ sunt rădăcinile ecuației $z^2 - sz + p = 0$, deci $\{z_1, z_2\} = \{-z_3, -z_4\}$ și astfel $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \{z_3, -z_3, z_4, -z_4\} \subseteq U_n$.

Dacă n este impar, atunci nu există rădăcini de ordinul n ale unității opuse.

Dacă $n = 2p$, cu $p \in \mathbb{N}^*$, atunci elementele mulțimii U_n se pot scrie sub forma $U_n = \{z_1, z_2, \ldots, z_p, -z_1, -z_2, \ldots, -z_p\}$. Deoarece $A_1 = \{z_1, -z_1\}$, $A_2 = \{z_2, -z_2\}$, $\ldots$, $A_p = \{z_p, -z_p\}$ formează o partiție a mulțimii U_n, conform *Principiului lui Dirichlet* rezultă că pentru a fi siguri că orice submulțime cu k elemente a lui U_n include două dintre submulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_p$ trebuie să luăm minim $k = p + 2 = \dfrac{n}{2} + 2$. Acesta este numărul căutat.

M 109. *Rezolvați ecuația* $\sin^2 6x \cdot \operatorname{tg} 3x = 2 \sin^3 4x$.

Titu Zvonaru, Comănești

Soluție. Condiția de existență: $\cos 3x \neq 0$. Folosind formule trigonometrice uzuale, ecuația se scrie, succesiv: $\sin^2 6x \sin 3x = 2 \sin^3 4x \cos 3x$, $(1 - \cos 12x) \sin 3x = 2 \sin 4x \cos 3x (1 - \cos 8x)$, $\sin 3x - \cos 12x \sin 3x = (\sin 7x + \sin x)(1 - \cos 8x)$, $2 \sin 3x - \sin 15x + \sin 9x = 2 \sin 7x + 2 \sin x - \sin 15x + \sin x - \sin 9x + \sin 7x$, $3 \sin 7x + 3 \sin x - 2 \sin 9x - 2 \sin 3x = 0$, $3 \sin 4x \cos 3x - 2 \sin 6x \cos 3x = 0$, $\cos 3x \left[6 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x (3 - 4 \sin^2 2x)\right] = 0$, $\sin 2x \cos 3x (3 \cos 2x - 3 + 4 - 4 \cos^2 2x) = 0$, $\sin 2x \cos 3x (1 + 4 \cos 2x)(1 - \cos 2x) = 0$, deci, ținând cont de condiția de existență, are mulțimea soluțiilor $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\pm \dfrac{1}{2} \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

M 110. *Fie $k \geq -1$ un număr real fixat și fie $\mathcal{S}$ mulțimea triunghiurilor neobtuzunghice. Determinați*

$$\min\left\{k(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)+\left(\sqrt{\operatorname{ctg} A}+\sqrt{\operatorname{ctg} B}+\sqrt{\operatorname{ctg} C}\right)^2\right\}$$

atunci când $\triangle ABC$ parcurge mulțimea $\mathcal{S}$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Definim

$$f_k(A,B,C)=k(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)+\left(\sqrt{\operatorname{ctg} A}+\sqrt{\operatorname{ctg} B}+\sqrt{\operatorname{ctg} C}\right)^2.$$

Avem $f_k\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=(k+3)\sqrt{3}$ și $f_k\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)=2k+4$. Conform problemei M 85 din MATINF 3/2019, rezolvată în MATINF 5/2020, avem

$$f_{1+2\sqrt{3}}(A,B,C)\geq f_{1+2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=f_{1+2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right).$$

În virtutea celor de mai sus, clamăm următoarea:

$$\min f_k(A,B,C)=\min\left\{(k+3)\sqrt{3},2k+4\right\}=\begin{cases}2k+4, & \text{dacă } -1\leq k\leq 1+2\sqrt{3},\\ (k+3)\sqrt{3}, & \text{dacă } k\geq 1+2\sqrt{3}.\end{cases}$$

Cazul 1. $-1\leq k\leq 1+2\sqrt{3}$. Din soluția problemei M 85, deducem că este suficient să arătăm că

$$k(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2\geq(2k+4)\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2},\ \forall x,y,z\geq 0,$$

fiind chiar suficient să considerăm următoarele două cazuri:

(i) $x\in[0,1]$ și $y=z=1$. Problema se reduce la a arăta că $(k+1)x^2+4x+2k+4\geq(2k+4)\sqrt{2x^2+1}$, echivalent cu $x\left[(k+1)^2x^3+8(k+1)x^2-4(k^2+5k+2)x+16(k+2)\right]\geq 0$, care se rescrie $x\left\{(k+1)(x-1)^2\left[(k+1)x+2(k+5)\right]+(-k^2+2k+11)(x+2)\right\}\geq 0$, adevărat.

(ii) $z=0$. Problema se reduce la a arăta că $(k+1)(x^2+y^2)\geq 2(k+1)xy$, evident adevărat.

Cazul 2. $k\geq 1+2\sqrt{3}$. Tot din soluția problemei M 85, deducem că este suficient să arătăm că

$$k(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2\geq(k+3)\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2},\ \forall x,y,z\geq 0,$$

fiind chiar suficient să considerăm din nou cazurile:

(i) $x\in[0,1]$ și $y=z=1$. Problema se reduce la a arăta că $(k+1)x^2+4x+2k+4\geq(k+3)\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x^2+1}$, echivalent cu $(x-1)^2\left[(k+1)^2x^2+2(k+1)(k+5)x+k^2-2k-11\right]\geq 0$, adevărat.

(ii) $z=0$. Deoarece $2k+4\geq(k+3)\sqrt{3}$, problema se reduce din nou la a arăta că $(k+1)(x^2+y^2)\geq 2(k+1)xy$, adevărat.

Demonstrația este astfel încheiată.

Clasa a XI-a

M 111. *Se consideră matricea* $X(a,b)=\begin{pmatrix} 2020 & a & -ab \\ 0 & 2019 & b \\ 0 & 0 & 2020 \end{pmatrix}$, *unde* $a,b\in\mathbb{C}$.

a) Arătați că există o infinitate de matrice $P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *de forma* $P=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *astfel încât* $P\cdot X(a,b)=X(0,0)\cdot P$.

b) Calculați $(X(a,b))^n$, *unde* $n\in\mathbb{N}^*$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. a) Avem $P\cdot X(a,b)=X(0,0)\cdot P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2020 & a+2019x & -ab+bx+2020y \\ 0 & 2019 & b+2020z \\ 0 & 0 & 2020 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2020 & 2020x & 2020y \\ 0 & 2019 & 2019z \\ 0 & 0 & 2020 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ z=-b \\ y\in\mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow P=\begin{pmatrix} 1 & a & y \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $y\in\mathbb{C}$.

b) Conform a) avem $X(a,b)=P^{-1}\cdot X(0,0)\cdot P$, cu $P=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultă că

$$(X(a,b))^n=P^{-1}\cdot(X(0,0))^n\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & -a & -ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2020^n & 0 & 0 \\ 0 & 2019^n & 0 \\ 0 & 0 & 2020^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2020^n & a\left(2020^n-2019^n\right) & -ab\left(2020^n-2019^n\right) \\ 0 & 2019^n & b\left(2020^n-2019^n\right) \\ 0 & 0 & 2020^n \end{pmatrix}.$$

M 112. *Fie matricele* $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *astfel încât* $AB=BA$, $\det(A+B)=\det A+\det B$ *și* $\det(A-B)=\det A-\det B$. *Arătați că:*

a) $\det\left(A^3+B^3\right)=\left(\det A+\det B\right)^3$;

b) $\det\left(A^3-B^3\right)=\left(\det A-\det B\right)^3$.

Daniel Jinga, Pitești

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Fie polinomul $P(x)=\det(A+xB)=\det A+ax+bx^2+(\det B)x^3$. Observăm că $P(1)=\det(A+B)=\det A+a+b+\det B$, deci $a+b=0$, iar $P(-1)=\det(A-B)=\det A-a+b-\det B$, deci $a-b=0$. Rezultă că $a=b=0$, deci $P(x)=\det(A+xB)=\det A+x^3\det B$.

a) Considerăm ecuația $x^3-1=0$, cu rădăcinile $x_1=1$, x_2 și x_3. Folosind *Formulele lui Viète* $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$, $x_1x_2x_3=1$ și ipoteza $AB=BA$, avem $(A+x_1B)(A+x_2B)(A+x_3B)=A^3+(x_1+x_2+x_3)A^2B+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)AB^2+$

$(x_1x_2x_3)\,B^3 = A^3 + B^3$. Astfel $\det(A^3+B^3) = \det(A+x_1B)\det(A+x_2B)\det(A+x_3B) = P(x_1)P(x_2)P(x_3) = (\det A + x_1^3\det B)(\det A + x_2^3\det B)(\det A + x_3^3\det B) = (\det A + \det B)^3$.

Egalitatea de la punctul b) se obține analog, considerând acum ecuația $x^3+1=0$.

M 113. *Fie $a,b\in(0,\infty)$, Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a+b}{n^2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2a+b}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{na+b}{n^2}\right)$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Notăm cu x_n șirul din enunț. Folosind *Inegalitatea mediilor* obținem

$$x_n \le \left\{\frac{1}{n}\left[n+\frac{\frac{n(n+1)}{2}\cdot a+nb}{n^2}\right]\right\}^n = \left[1+\frac{(n+1)a+2b}{2n^2}\right]^n, \quad (1).$$

Pe de altă parte, scriind $x_n^2 = \prod\limits_{k=1}^{n}\left[\left(1+\dfrac{ka+b}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{(n-k+1)a+b}{n^2}\right)\right]$, obținem

$$x_n^2 > \prod_{k=1}^{n}\left[1+\frac{ka+b}{n^2}+\frac{(n-k+1)a+b}{n^2}\right] = \left[1+\frac{(n+1)a+2b}{n^2}\right]^n, \quad (2).$$

Din (1) și (2) rezultă că $\left[1+\dfrac{(n+1)a+2b}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} < x_n \le \left[1+\dfrac{(n+1)a+2b}{2n^2}\right]^n$, de unde, aplicând *Criteriul cleștelui*, se obține ușor că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{e^a}$.

M 114. *a) Aflați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care există limita de funcție $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(ax+b)$.*

b) Aflați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care există limita de șir $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(an+b)$.

***

Soluție. a) Pentru $a=0$ avem $\sin(ax+b)=\sin b\to\sin b$. Pentru $a\neq 0$, luând șirurile $x_n=\dfrac{\operatorname{sgn}(a)\cdot n\pi-b}{a}$ și $y_n=\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\operatorname{sgn}(a)\cdot n\pi-b}{a}$ avem $x_n,y_n\to\infty$, $\sin(ax_n+b)=0\to 0$ și $\sin(ay_n+b)=1\to 1$, deci nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(ax+b)$. Astfel limita $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(ax+b)$ există dacă și numai dacă $a=0$.

b) Fie $a=a_0+2k\pi$, cu $a_0\in[0,2\pi)$ și $k\in\mathbb{Z}$. Avem $\sin(an+b)=\sin(an_0+b)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Cazul 1. $a_0=0$. Evident, $\sin(a_0n+b)=\sin b\to\sin b$.

Cazul 2. $a_0\in(0,\pi)$. Fie $\varepsilon=\dfrac{\pi-a_0}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Pentru orice $m\in\mathbb{N}$, $m\ge\dfrac{b}{2\pi}$, intervalul $I_m=\left[\dfrac{2m\pi+\varepsilon-b}{a_0},\dfrac{2m\pi+\pi-\varepsilon-b}{a_0}\right]$ are lungimea $\dfrac{\pi-2\varepsilon}{a_0}=1$, deci există $n_m\in I_m\cap\mathbb{N}$. Avem $a_0n_m+b\in[2m\pi+\varepsilon,2m\pi+\pi-\varepsilon]$, deci $\sin(a_0n_m+b)\in[\sin\varepsilon,1]$, (1). Analog, intervalul $J_m=\left[\dfrac{2m\pi+\pi+\varepsilon-b}{a_0},\dfrac{2m\pi+2\pi-\varepsilon-b}{a_0}\right]$ are lungimea 1, deci există $n'_m\in J_m\cap\mathbb{N}$ și avem $a_0n'_m+b\in[2m\pi+\pi+\varepsilon,2m\pi+2\pi-\varepsilon]$, deci $\sin(a_0n'_m+b)\in[-1,-\sin\varepsilon]$, (2). Cum $-\sin\varepsilon<\sin\varepsilon$, din (1) și (2) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(a_0n+b)$ nu există.

Cazul 3. $a_0 = \pi$. Avem $\sin(a_0 n + b) = \sin(n\pi + b)$. Cum $\sin(2m\pi + b) = \sin b$ și $\sin((2m+1)\pi + b) = -\sin b$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sin(n\pi + b)$ există doar dacă $\sin b = 0$, adică $b = p\pi$ cu $p \in \mathbb{Z}$.

Cazul 4. $a_0 \in (\pi, 2\pi)$. Pentru $a_1 = 2\pi - a_0$ avem $\sin(a_0 n + b) = -\sin(a_1 n - b)$ și $a_1 \in (0, \pi)$, deci conform Cazului 2 rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sin(a_0 n + b)$ nu există.

În concluzie, limita $\lim_{n\to\infty} \sin(an + b)$ există dacă și numai dacă $a = 2k\pi$ cu $k \in \mathbb{Z}$ sau $\begin{cases} a = \pi + 2k\pi \\ b = p\pi \end{cases}$ cu $k, p \in \mathbb{Z}$.

M 115. *Fie $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a + b + c + d = 4$.*

a) Arătați că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 8\left(\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$.

Când are loc egalitatea?

b) (problemă deschisă) Există $k > \frac{2}{3}$ astfel încât inegalitatea*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 8\left(\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}\right)^{k} \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

să fie adevărată pentru orice numere a, b, c, d care îndeplinesc condițiile date? În caz afirmativ, determinați valorile lui k.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Vom utiliza următoarele două rezultate.

Lema 1 (problema **L 355** din RecMat 2/2018). Fie $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ și $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a+b+c+d = 4$ și $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4(3t^2+1)$. Atunci $abc+abd+acd+bcd \geq 4(t+1)^2(1-2t)$, cu egalitate pentru $(1+t, 1+t, 1+t, 1-3t)$ și permutările sale.

Lema 2 (problema **MGO 79** din RMGO 1/2018). Fie $\alpha \geq \beta \geq 0$ și $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a+b+c+d = 2\alpha+\beta$ și $a^2+b^2+c^2+d^2 = 2\alpha^2+\beta^2$. Atunci $abc+abd+acd+bcd \geq \alpha^2\beta$, cu egalitate pentru $(\alpha, \alpha, \beta, 0)$ și permutările sale.

a) Cum $4 \leq a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 16$, există $t \in [0, 1]$ astfel încât $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4(3t^2+1)$, deci $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 6(1-t^2)$.

Cazul 1. $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Conform Lemei 1, este suficient să arătăm că $2 + (t+1)^{\frac{4}{3}}(1-2t)^{\frac{2}{3}} \geq 3(1-t^2)$, adică $f(t) \geq 0$, unde $f(t) = (t+1)^{\frac{4}{3}}(1-2t)^{\frac{2}{3}} + 3t^2 - 1$, pentru orice $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Avem $f'(t) = 2t\left(3 - 2\sqrt[3]{\frac{t+1}{1-2t}}\right)$. Deoarece funcția $\varphi(t) = 3 - 2\sqrt[3]{\frac{t+1}{1-2t}}$ este strict descrescătoare pe $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, rezultă că $\min f(t) \in \left\{f(0), f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$. Dar $f(0) = 0$ și $f\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, deci $f(t) \geq 0$ pentru orice $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Cazul 2. $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ 2\alpha^2 + \beta^2 = 4(3t^2+1) \\ \alpha \geq \beta \geq 0 \end{cases}$ și obținem că $\alpha = \dfrac{4+\sqrt{2(9t^2-1)}}{3}$, $\beta = \dfrac{4-2\sqrt{2(9t^2-1)}}{3}$. Conform Lemei 2, este suficient să arătăm că $2\alpha^2 + \beta^2 + 2\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\alpha^4\beta^2} \geq 2\alpha^2 + 4\alpha\beta$, adică $\beta^2 + 2\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\alpha^4\beta^2} \geq 4\alpha\beta$. Notând $\dfrac{\beta}{\alpha} = x^3 \in [0,1]$, ultima inegalitate devine $x^6 + 2\sqrt[3]{4}x^2 \geq 4x^3$, adică $x^4 + 2\sqrt[3]{4} \geq 4x$, adevărat, deoarece $x^4 + 3 \geq 4x$ (din *Inegalitatea mediilor*) și $2\sqrt[3]{4} > 3$.

Cazul 3. $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$. Este suficient să arătăm că $16 \geq 24(1-t^2)$, evident adevărat.

Remarcăm că egalitatea are loc pentru $(1,1,1,1)$ sau $(2,2,0,0)$ și permutările sale.

Nota redacției. Pentru punctul b) nu am primit, deocamdată, soluții corecte, deci problema rămâne în continuare deschisă.

Clasa a XII-a

M 116. *Fie $\mathcal{H}$ o ramură a unei hiperbole, cu vârful in A. Fie $X, Y \in \mathcal{H}$. Dacă $X \neq Y$, definim $X * Y = Z$, unde Z este al doilea punct de intersecție cu $\mathcal{H}$ al paralelei duse prin A la XY, iar dacă $X = Y$ definim $X * Y = Z$, unde Z este al doilea punct de intersecție cu $\mathcal{H}$ al paralelei duse prin A la tangenta în X la $\mathcal{H}$. Demonstrați că $(\mathcal{H}, *)$ este grup abelian.*

***

Soluție (*Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Fie

$$\mathcal{H} = \left\{ X(x,y) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R},\ x > 0 \text{ și } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} = \{X(a\cosh t, b\sinh t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

unde a și b sunt numere reale pozitive fixate. Evident, $A(a,0) = A(a\cosh 0, b\sinh 0)$.

Demonstrăm că pentru orice $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ avem

$$X(a\cosh t_1, b\sinh t_1) * Y(a\cosh t_2, b\sinh t_2) = Z(a\cosh(t_1+t_2), b\sinh(t_1+t_2)), \quad (1).$$

Cazul 1. $X \neq Y$, adică $t_1 \neq t_2$. Panta dreptei XY este

$$m_{XY} = \frac{b(\sinh t_1 - \sinh t_2)}{a(\cosh t_1 - \cosh t_2)} = \frac{b}{a} \cdot \frac{2\sinh\frac{t_1-t_2}{2}\cosh\frac{t_1+t_2}{2}}{2\sinh\frac{t_1-t_2}{2}\sinh\frac{t_1+t_2}{2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cosh\frac{t_1+t_2}{2}}{\sinh\frac{t_1+t_2}{2}},$$

deci paralela d dusă prin A la XY are ecuația $y - 0 = m_{XY}(x-a)$, adică $ay\sinh\dfrac{t_1+t_2}{2} = b(x-a)\cosh\dfrac{t_1+t_2}{2}$. Se verifică ușor că $Z \in d$. Cum $A, Z \in d$ și orice dreaptă intersectează $\mathcal{H}$ în cel mult două puncte, deducem că $Z = X * Y$.

Cazul 2. $X = Y$, adică $t_1 = t_2$. Tangenta în X la $\mathcal{H}$ are ecuația $\frac{xx_X}{a^2} - \frac{yy_X}{b^2} = 1$, deci panta sa este

$$m = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_X}{y_X} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cosh t_1}{\sinh t_1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cosh \frac{t_1+t_2}{2}}{\sinh \frac{t_1+t_2}{2}}.$$

Continuând ca la Cazul 1 rezultă din nou că $Z = X * Y$.

Considerând bijecția $f : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$, $f(t) = X(a\cosh t, b\sinh t)$, conform *Teoremei de transport de structură* din (1) rezultă că $(\mathcal{H}, *)$ este un grup abelian izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

M 117. *Fie* $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2019} \in \mathbb{Z}_{17}$. *Arătați că ecuația*

$$\left(\ldots\left(\left((x+a_1)^3+a_3\right)^5+a_5\right)^7+a_7\ldots\right)^{2019}+a_{2019}=\widehat{0}$$

are o unică soluție în Z_{17}.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Ecuația dată poate fi scrisă sub forma $(f_{2019} \circ f_{2017} \circ \ldots \circ f_3 \circ f_1)(x) = \widehat{0}$, unde $f_k : \mathbb{Z}_{17} \to \mathbb{Z}_{17}$, $f_k(x) = x^k + a_k$, pentru orice $k \in \{1, 3, \ldots, 2019\}$.

Demonstrăm că funcția f_k este bijectivă, pentru orice $k \in \{1, 3, \ldots, 2019\}$. Fie $x, y \in \mathbb{Z}_{17}$ cu $f_k(x) = f_k(y)$, adică $x^k = y^k$. Dacă $x = \widehat{0}$ rezultă că $y^k = \widehat{0}$, deci și $y = \widehat{0}$ (Z_{17} nu are divizori ai lui zero). Analog, dacă $y = \widehat{0}$ rezultă că $x = \widehat{0}$. Fie acum $x, y \neq \widehat{0}$. Atunci $\left(xy^{-1}\right)^k = \widehat{1}$. Cum orice $t \in \mathbb{Z}_{17}^*$ are ordinul un divizor al lui 16 iar k este impar, rezultă că $xy^{-1} = \widehat{1}$, deci $x = y$. Astfel funcția f_k este injectivă. Având atât drept domeniu cât și codomeniu mulțimea finită Z_{17}, rezultă că f_k este bijectivă. Prin urmare funcția $f_{2019} \circ f_{2017} \circ \ldots \circ f_3 \circ f_1$ este bijectivă, deci ecuația dată are soluție unică.

M 118. *Rezolvați în* $\mathbb{R}_+^4$ *sistemul* $\begin{cases} a+b+c+d = 2+6\sqrt{3} \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd = 24 \\ abcd = 4 \end{cases}$.

Sladjan Stankovik, Macedonia de Nord

Soluție (*Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Vom utiliza următorul rezultat ce se demonstrează analog Lemei 1 de la pag. 26 din MATINF 3/2019, fiind o duală a acesteia.

Lemă. Fie $k > 0$ și $t \in (0, 1]$ numere fixate și fie $a, b, c, d > 0$ astfel încât $a+b+c+d = 2k \cdot \frac{t^2+1}{t}$ și $ab + bc + cd + da + ac + bd = 6k^2$. Atunci $\max(abcd) = k^4t^2\left(2 - t^2\right)$ și acest maxim se atinge în $\left(kt, kt, kt, k \cdot \frac{2-t^2}{t}\right)$ și permutările sale.

Pentru $6k^2 = 24$ și $2k \cdot \frac{t^2+1}{t} = 2+6\sqrt{3}$, adică $k = 2$ și $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, rezultă că $\max(abcd) = 4$ și se atinge în $\left(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1, 3\sqrt{3}+5\right)$ și permutările sale. În concluzie, acestea sunt soluțiile sistemului dat.

M 119. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Calculați*

$$\int \frac{(a^2-b^2)\sin 2x + 2ab\cos 2x}{(b^2-a^2)\cos 2x + 2ab\sin 2x - 4(a\sin x + b\cos x) + a^2+b^2+2}\,dx,\ x \in I,$$

I fiind un interval arbitrar pe care funcția pentru care se calculează integrala este definită.

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Fie $u(x) = a\sin x + b\cos x$. Avem $u^2(x) = a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x + ab\sin 2x = \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2x + ab\sin 2x + \frac{a^2+b^2}{2}$, deci $2u^2(x) - 4u(x) + 2 = (b^2-a^2)\cos 2x + 2ab\sin 2x - 4(a\sin x + b\cos x) + a^2+b^2+2$, (1).

Pe de altă parte, avem $u'(x) = a\cos x - b\sin x$, de unde $u(x)u'(x) = (a^2-b^2)\sin x\cos x - ab\sin^2 x + ab\cos^2 x = \frac{a^2-b^2}{2}\sin 2x + ab\cos 2x$, deci $2u(x)u'(x) = (a^2-b^2)\sin 2x + 2ab\cos 2x$, (2). Din (1) și (2), integrala din enunț devine $\int \frac{2u(x)u'(x)}{2u^2(x)-4u(x)+2}\,dx = \int \frac{u(x)u'(x)}{(u(x)-1)^2}\,dx = \int \frac{u(x)-1+1}{(u(x)-1)^2}\cdot u'(x)\,dx = \int \frac{1}{u(x)-1}\cdot u'(x)\,dx + \int \frac{1}{(u(x)-1)^2}\cdot u'(x)\,dx = \ln|u(x)-1| - \frac{1}{u(x)-1} + \mathcal{C} = \ln|a\sin x + b\cos x - 1| - \frac{1}{a\sin x + b\cos x - 1} + \mathcal{C}$.

M 120. *Fie $a \in \mathbb{R}$. Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \sin(a + x^n)\,dx$.

Alexandru Daniel Pîrvuceanu și *Cezar Alexandru Trăncănău*, elevi, Drobeta Turnu Severin

Soluția 1 (*Quan Minh Nguyen*, student, Vietnam). Avem

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \sin(a+x^n)\,dx - \sin a\right| &= \left|\int_0^1 (\sin(a+x^n) - \sin a)\ dx\right| \\ &= \left|\int_0^1 (\sin a\,(\cos x^n - 1) + \sin x^n \cos a\,dx)\right| \\ &\le \left|\int_0^1 \sin a\,(\cos x^n - 1)\ dx\right| + \left|\int_0^1 \sin x^n\cos a\,dx\right| \\ &= |\sin a|\cdot\left|\int_0^1 (\cos x^n - 1)\ dx\right| + |\cos a|\cdot\left|\int_0^1 \sin x^n\,dx\right| \\ &\le |\sin a|\cdot\int_0^1 |\cos x^n - 1|\ dx + |\cos a|\cdot\int_0^1 |\sin x^n|\ dx.\end{aligned}$$

Cum $|\sin x^n| \le |x^n|$ și $|1-\cos x^n| \le \frac{(x^n)^2}{2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că

$$\int_0^1 |\cos x^n - 1|\ dx \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2}\,dx = \frac{1}{2(2n+1)} \text{ și } \int_0^1 |\sin x^n|\ dx \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Prin urmare $\left|\int_0^1 \sin(a+x^n)\,dx - \sin a\right| \leq \frac{|\sin a|}{2(2n+1)} + \frac{|\cos a|}{n+1}$. Luând $n \to \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\int_0^1 \sin(a+x^n)\,dx - \sin a\right| = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sin(a+x^n)\,dx = \sin a$.

Soluția 2 (a autorilor). Pentru $n \in \mathbb{N}$ arbitrar avem

$$\left|\int_0^1 \sin(a+x^n)dx - \sin a\right| = \left|\int_0^1 (\sin(a+x^n) - \sin a)\,dx\right| = 2\left|\int_0^1 \sin\frac{x^n}{2}\cos\left(a+\frac{x^n}{2}\right)dx\right|$$

$$\leq 2\int_0^1 \left|\sin\frac{x^n}{2}\cos\left(a+\frac{x^n}{2}\right)\right|dx \leq 2\int_0^1 \left|\sin\frac{x^n}{2}\right|dx = 2\int_0^1 \sin\frac{x^n}{2}dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

unde am folosit inegalitatea clasică $\sin t \leq t$, pentru orice $t \geq 0$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sin(a+x^n)dx = \sin a$.

Remarcăm că limita propusă poate fi calculată și folosind *Teorema convergenței dominate*, dar acest rezultat nu este accesibil majorității elevilor de liceu.

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

M 145. Demonstrați că dacă

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{99}=\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{N}^*,$$

atunci $6m-11n$ se divide cu 103.

Cristinel Mortici, Viforâta

M 146. Arătați că pentru orice numere reale a, b, c și d avem

$$\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)\left(1+c^4\right)\left(1+d^4\right)\geq\max\left\{(ab+cd)^4,(ac+bd)^4,(ad+bc)^4\right\}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 147. Determinați valorile reale pozitive ale lui p pentru care inegalitatea

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3$$

are loc pentru orice $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a\leq b\leq c$, $a+b+c=ab+bc+ca>0$ și $bc=p^2$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

M 148. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB=a$, $AD=b$, $a>b$ și fie punctele $M\in(BC)$ și $N\in(CD)$ astfel încât $BM=mb$ și $DN=na$, $m,n\in(0,1)$.

a) Demonstrați că $[AC$ este bisectoarea unghiului MAN dacă și numai dacă are loc egalitatea

$$\left(\frac{2a^2}{a^2-b^2}-m\right)\left(\frac{2b^2}{a^2-b^2}+n\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2.$$

b) Pentru $a=28$ și $b=21$, arătați că nu există $M\in(BC)$ și $N\in(CD)$ astfel încât segmentele CM și CN să aibă lungimile numere naturale și $[AC$ să fie bisectoarea unghiului MAN.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 149. Demonstrați că în orice triunghi ABC avem

$$\left(a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{OG^2}{R^2}\geq 18.$$

Nguyen Van Huyen, Vietnam

Clasa a X-a

M 150. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c + 2 = abc$. Demonstrați că

$$(n + ab)(n + bc)(n + ca) \geq (n + 4)^3,$$

pentru orice $n > 0$.

Marin Chirciu, Pitești

M 151. Arătați că pentru orice $a, b, c, d > 0$ avem:

a) $$\frac{a}{\sqrt[3]{(a+3b)(a+3c)(a+3d)}} + \frac{b}{\sqrt[3]{(b+3c)(b+3d)(b+3a)}} + \frac{c}{\sqrt[3]{(c+3d)(c+3a)(c+3b)}} + \frac{d}{\sqrt[3]{(d+3a)(d+3b)(d+3c)}} \geq 1;$$

b) $$\frac{a(a+2b+c)}{\sqrt[3]{(a+3b)(a+3c)(a+3d)}} + \frac{b(b+2c+d)}{\sqrt[3]{(b+3c)(b+3d)(b+3a)}} + \frac{c(c+2d+a)}{\sqrt[3]{(c+3d)(c+3a)(c+3b)}} + \frac{d(d+2a+b)}{\sqrt[3]{(d+3a)(d+3b)(d+3c)}} \geq a+b+c+d.$$

Mihály Bencze, Brașov

M 152. Fie $a, b > 0$ cu $a > b + 1$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$(a+b)^x + (a-b)^{\frac{9}{x}} = 2\left(a^3 + 3ab^2\right).$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

M 153. Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătați că produsul

$$P = \left(n + \sqrt[n]{n}\right)\left(n + \varepsilon \cdot \sqrt[n]{n}\right)\left(n + \varepsilon^2 \cdot \sqrt[n]{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n + \varepsilon^{n-1} \cdot \sqrt[n]{n}\right)$$

este un număr natural par.

Ionel Tudor, Călugăreni

M 154. Fie ABC un triunghi, ψ cercul înscris în triunghiul ABC, de centru I, iar ω cercul tangent interior cercului circumscris triunghiul ABC în punctul T și tangent la laturile AB și BC în punctele K, respectiv L (cercul ω se numește B-*semiînscris* sau B-*mixtliniar înscris* triunghiului ABC). Fie D punctul de tangență al cercului ψ cu latura AC, E al doilea punct de intersecție dintre cercul ψ și BT, în ordinea de la B spre T, iar F al doilea punct de intersecție, în afară de E, dintre cercul circumscris triunghiului EDI și BT.

Demonstrați că punctele K, F și I sunt coliniare.

Emmanuel Antonio José García, Republica Dominicană

Clasa a XI-a

M 155. a) Câte soluții are sistemul de ecuații $\begin{cases} x^3y^{10}x^{12} = e \\ y^4x^{10}y^{11} = e \end{cases}$, $x, y \in \mathcal{S}_4$?

b) Aceeași cerință pentru $x, y \in \mathcal{S}_4$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 156. Fie $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ și $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{C})$ astfel încât $(ABC)^q = ABC$, $(BCA)^r = BCA$ și $(CAB)^s = CAB$.

a) Demonstrați că $\operatorname{rang}(ABC) = \operatorname{rang}(BCA) = \operatorname{rang}(CAB)$.

b) Rămâne concluzia adevărată dacă se renunță la una dintre egalitățile din ipoteză?

***

M 157. Fie triunghiul ABC și M un punct interior acestuia. Notăm cu x, y și z ariile triunghiurilor MBC, MCA, respectiv MAB.

a) Arătați că există cel mult un triunghi XYZ astfel încât $A \in YZ$, $B \in ZX$, $C \in XY$ și dreptele XA, YB și ZC sunt concurente în M.

b) Determinați cazurile în care nu există triunghiul XYZ cu proprietățile menționate.

c) Determinați cazurile în care triunghiul XYZ există, iar punctele A, B și C aparțin chiar segmentelor (YZ), (ZX), respectiv (XY).

d) În cazul în care triunghiul XYZ există, exprimați aria lui în funcție de x, y și z.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

M 158. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât

$$x_{n+2} \leq x_n + \frac{1}{n^2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ definit prin $a_n = \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ este convergent.

Cristinel Mortici, Viforâta

M 159. Fie $a > 1$ un număr real fixat. Rezolvați ecuația

$$x + a^{6\log_x a} + x \cdot a^{6\log_x a} = a^2 + a^3 + a^5.$$

Marin Chirciu, Pitești

Clasa a XII-a

M 160. a) Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo n are exact 11 divizori ai lui zero (diferiți de zero).

b) Care este cardinalul minim al unui inel cu exact 11 divizori ai lui zero (diferiți de zero)?

***

M 161. Calculați $\displaystyle\int \frac{4x^4 + 3x^2 + 2}{x^5 + x^3 + x}\, dx,\ x \in (0, \infty).$

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

M 162. Fie $a, b, \lambda > 0$, $a \neq b$. Arătați că $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{a^x + b^{\lambda - x}}{b^x + a^{\lambda - x}}\, dx > \lambda.$

Marin Chirciu, Pitești

M 163. Determinați cel mai mic număr real a pentru care inegalitatea

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq 3$$

are loc pentru orice numere reale $x, y, z \geq a$ astfel încât $x + y + z = 3$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin și *Costel Bălcău*, Pitești

M 164. Fie $q > 1$ un număr real fixat. Considerăm mulțimea

$$S = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c + d = 4 \text{ și } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4q\right\}$$

și funcția $E : S \to \mathbb{R}$, $\quad E(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 12abcd.$

Determinați $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in S$ pentru care

$$E(a_1, b_1, c_1, d_1) \geq E(a, b, c, d),\ \forall\, (a, b, c, d) \in S.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 76 (progresii). Se dau două progresii aritmetice cu m, respectiv n termeni. Prima progresie are rația r și primul termen a, iar a doua progresie are rația q și primul termen b. Notăm cu A mulțimea termenilor primei progresii aritmetice, iar cu B mulțimea termenilor celei de-a doua progresii aritmetice.

Cerință

Cunoscând m, a, r, n, b, q, determinați numărul de elemente al reuniunii mulțimilor A și B.

Exemplu

Date de intrare

$a = 2, r = 3, m = 5, b = 4, q = 2, n = 6$

Date de ieșire

9

Explicație

$A = \{2, 5, 8, 11, 14\}$; $B = \{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea $\{2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 14\}$, care are 9 elemente.

Costel Bălcău, Pitești

I 77 (secventa). Se dă un șir de caractere. Se cere lungimea maximă a unei secvețe formate numai din litere mici. O secvență are componentele cu indici consecutivi.

Cerință

Pentru un șir de caractere determinați lungimea maximă a unei secvențe de litere mici.

Restricții și precizări

- șirul de caractere are cel mult 100000 caractere, litere mari, litere mici sau cifre
- șirul de caractere se termină cu enter

Date de intrare

Fișierul `sir.in` conține pe prima linie șirul de caractere.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `sir.out` va conține lungimea maximă a unei secvențe format numai din litere mici.

Exemplu

sir.in	sir.out	Explicație
`Ab5xyz9&bz*7`	3	Sunt 3 secvențe de litere mici: `b,xyz` și `bz`. Cea mai lungă secvență este `xyz` - are 3 caractere.

Doru Constantin, Pitești

I 78 (secventa comuna). Se dau două șiruri de caractere. Se cere lungimea maximă a unei secvețe formate numai din litere mici și comună celor două șiruri de caractere. O secvență are componentele cu indici consecutivi.

Cerință

Pentru două șiruri de caractere determinați lungimea maximă a unei secvențe de litere mici comună acestora.

Restricții și precizări

- șirurile de caractere au cel mult 1000 caractere, litere mari, litere mici sau cifre
- șirurile de caractere se termină cu enter

Date de intrare

Fișierul `sir.in` conține pe prima linie primul șir de caractere, iar pe linia a doua al doilea șir de caractere.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `sir.out` va conține lungimea maximă a unei secvențe format numai din litere mici, comună celor două șiruri de caractere.

Exemplu

sir.in	sir.out	Explicație
`Ab5xyz9&bz*7` `yz67bzaaxyz8`	3	Cea mai lungă secvență de litere mici comună celor două șiruri de caractere este `xyz` și are 3 caractere.

Ioan Alexandru Popescu, București

I 79 (construire). Se dă n număr natural. Construiți un tablou pătratic de dimensiune n cu termenii unei progresii aritmetice (primul termen este t și rația r) șerpuit: prima linie cu termenii de la stânga la dreapta, a doua linie cu termenii de la dreapta la stânga, a treia linie cu termenii de la stânga la dreapta și așa mai departe.

Cerință

Cunoscând n, t și r construiți tabloul conform specificațiilor anterioare și apoi afișați suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv secundară.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100$
- $1 \leq t, r \leq 1000$

Date de intrare

Fișierul `construire.in` conține pe prima linie cu spațiu între ele numerele n, t și r.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `construire.out` va conține suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv secundară pe o linie cu un spațiu între ele.

Exemplu

`construire.in`	`construire.out`	Explicație
`4 3 2`	`33 33`	Tabloul are elementele 3 5 7 13 11 9 15 17 19 Elementele diagonalei principale sunt: 3 11 19 cu suma 33 Elementele diagonalei secundare sunt: 7 11 15 cu suma 33

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 80 (spirala). Se dă n număr natural. Construiți un tablou pătratic de dimensiune n cu termenii unei progresii aritmetice (primul termen este t și rația r) în spirală pornind din colțul de pe linia 1, coloana 1 și mergând spre dreapta, ca în exemplu.

Cerință

Cunoscând n, t și r construiți tabloul conform specificațiilor anterioare și apoi afișați suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv secundară.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100$
- $1 \leq t, r \leq 1000$

Date de intrare

Fișierul `spirala.in` conține pe prima linie cu spațiu între ele numerele n, t și r.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `spirala.out` va conține suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv secundară pe o linie cu un spațiu între ele.

Exemplu

`spirala.in`	`spirala.out`	Explicație
`4 3 2`	`33 41`	Tabloul are elementele 3 5 7 17 19 9 15 13 11 Elementele diagonalei principale sunt: 3 19 11 cu suma 33 Elementele diagonalei secundare sunt: 7 19 15 cu suma 41

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Clasa a X-a

I 81 (expresie). Folosind operatorii „+" (adunare) și „∗" (înmulțire) între cifrele zecimale se pot crea diferite expresii cu valori variate. Exemplu: $0+1+2+3+4+5*6+7+8+9$, valoarea acestei expresii este 64.

Cerință

Determinați toate expresiile formate după regula prezentată, care au valoarea un număr pătrat perfect.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `expresie.out` va conține expresiile din cerință împreună cu valorile lor. Fiecare linie din fisier va avea formatul: $0+1+2+3+4+5*6+7+8+9=64$

Ioan Alexandru Popescu, București

I 82 (text). Se dă un text T format din litere mari, litere mici, cifre și spații. Înlocuind literele mari din textul T cu pozițiile lor în alfabet, literele mici cu codurile lor ASCII, iar cifrele cu pătratul lor, textul T se va transforma astfel într-un șir de cifre si spații pe care îl notăm cu H.

Cerință

Cunoscând textul T, afișați șirul de caractere H construit ca mai sus. Apoi afișați numerele separate de spații, în ordine crescătoare.

Restricții și precizări

- T are cel mult 10000 de caractere
- Cuvintele și numerele din T sunt separate prin câte un spațiu
- Cuvintele și numerele din T nu au mai mult de 6 caractere

Date de intrare

Fișierul `text.in` conține pe prima linie textul T.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `text.out` va conține pe prima linie șirul de caractere H și pe liniile următoare numerele din H, câte unul pe o linie, în ordine crescătoare.

Exemplu

`text.in`	`text.out`	Explicație

`aBc 24 CD`	`97299 416 34`
	`34`
	`416`
	`97299`
		Caracterele din text se înlocuiesc astfel:
		`a-->97`
		`B-->2`
		`c-->99`
		`2-->4`
		`4-->16`
		`C-->3`
		`D-->4`

Costel Bălcău, Pitești

I 83 (**puncte**). Se dau n puncte în plan prin coordonatele lor. Determinați un punct printre punctele date astfel încât paralela la axa ordonatelor (verticala) dusă prin el să aibă proprietatea că $|s-d|$ este minimă, unde s este numărul de puncte aflate în semiplanul din stânga, iar d numărul de puncte aflate în semiplanul din dreapta delimitate de această dreaptă.

Cerință

Cunoscând coordonatele celor n puncte, determinați cel mai mic indice al unui punct cu proprietatea din enunț.

Restricții și precizări

- $1 \le n \le 100000$
- Coordonatele punctelor sunt numere naturale ≤ 100000000

Date de intrare

Fișierul `puncte.in` conține pe prima linie n, apoi pe liniile următoare coordonatele punctelor separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `puncte.out` va conține pe prima linie indicele punctului cerut în enunț.

Exemplu

`puncte.in`	`puncte.out`	Explicație
7 50 5 10 10 20 10 40 5 10 0 20 5 30 5 40 5	3	Ducând verticala prin al 3-lea sau al 6-lea punct se obține în semiplanul din stânga două puncte și în cel din dreapta 3 puncte (diferența minimă). Se va afișa 3 pentru că este indicele cel mai mic.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 84 (**ecuatii**). Se dau n numere naturale cu maxim trei cifre fiecare si m ecuații de gradul 2 prin cei trei coeficienti a, b, c (ecuatia fiind $ax^2 + bx + c = 0$). Determinați numărul de ecuații, care au toate soluțiile în mulțimea de numere date.

Cerință

Cunoscând n, cele n numere, m si cele m triplete de coeficienți se cere să se determine numărul de ecuații cu proprietatea din enunț.

Restricții și precizări

- $1 \le n \le 100000$
- Cele n numere sunt < 1000
- Coeficienții ecuațiilor sunt numere întregi cu maxim 4 cifre fiecare

Date de intrare

Fișierul `ecuatii.in` conține pe prima linie n, pe a doua linie cele n numere separate prin câte un spațiu, pe a treia linie m și pe umătoarele m linii câte 3 numere de forma a b c pentru coeficienții fiecărei ecuații.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `ecuatii.out` va conține pe prima linie numărul cerut în enunț.

Exemplu

ecuatii.in	ecuatii.out	Explicație
3 2 5 3 4 1 1 1 1 -6 9 1 -3 2 1 -5 6	2	Cele 4 ecuații sunt: 1) $x^2 + x + 1 = 0$, cu rădăcini complexe 2) $x^2 - 6x + 9 = 0$, cu rădăcina dublă 3 3) $x^2 - 3x + 2 = 0$, cu rădăcinile 1 și 2 4) $x^2 - 5x + 6 = 0$, cu rădăcinile 2 și 3 Doar ecuațiile 2) și 4) au toate rădăcinile printre numere 2, 5, 3

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 85 (**cuvinte**). Se dă un șir de caractere care se termină cu enter format numai din litere mici. Câte cuvinte formate cu toate literele distincte din șirul dat se pot forma?

Cerință

Cunoscând șirul de caractere să se determine numărul din enunț modulo 7907.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000000$

Date de intrare

Fișierul `cuvinte.in` conține pe prima linie șirul de caractere.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `cuvinte.out` va conține pe prima linie numărul cerut în enunț.

Exemplu

cuvinte.in	cuvinte.out	Explicație
canall	6	Literele din sirul de caractere sunt a, c și n. Cu acestea se pot forma 6 cuvinte: *can*, *cna*, *acn*, *anc*, *nac*, *nca*

Doru Constantin, Pitești

Clasele XI-XII

I 86 (**partitii**). Se dau n numere naturale distincte. Determinați numărul de partiții ale mulțimii formate cu numerele date, care au proprietatea că fiecare submulțime conține cel puțin un număr prim.

Cerință

Cunoscând n și numerele date, se cere să se determine numărul de partiții cu proprietatea din enunț.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 25$
- Cele n numere sunt ≤ 100000000

Date de intrare

Fișierul `partitii.in` conține pe prima linie n, apoi pe linia a doua cele n numere separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `partitii.out` va conține pe prima linie numărul cerut în enunț.

Exemplu

`partitii.in`	`partitii.out`	Explicație
4 10 3 8 7	5	Partițiile formate cu submulțimi ce conțin cel puțin un număr prim sunt: $\{10, 3, 8, 7\}$ $\{10, 3, 8\}$ $\{7\}$ $\{10, 3\}$ $\{8, 7\}$ $\{3, 8\}$ $\{10, 7\}$ $\{3\}$ $\{10, 8, 7\}$

Costel Bălcău, Pitești

I 87 (numarare). Se dau n numere naturale. Determinați câte numere dintre acestea se pot scrie ca sumă de exact $[n/2]$ numere prime distincte.

Cerință

Cunoscând n și numerele date se cere să se determine numărul de numere cu proprietatea din enunț.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 20$
- Cele n numere sunt ≤ 100000

Date de intrare

Fișierul `numarare.in` conține pe prima linie n, apoi pe linia a doua cele n numere separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `numarare.out` va conține pe prima numărul cerut în enunț.

Exemplu

`numarare.in`	`numarare.out`	Explicație
4 10 4 1 8	2	Numerele care se pot scrie ca suma de două numere prime distincte sunt: $10 = 3 + 7$ $8 = 3 + 5$

Ioan Alexandru Popescu, București

I 88 (arce). Se dă un graf orientat cu n noduri și m arce. Pentru acest graf se dorește determinarea numărului cel mai mare de arce care se găsesc într-o component tare conexă.

Cerință

Cunoscând n, m și cele m arce se cere să se determine numărul cel mai mare de arce care se găsesc într-o component tare conexă.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100$

Date de intrare

Fișierul `arce.in` conține pe prima linie n și m separate printr-un spațiu, apoi pe următoarele m linii nodurile arcelor separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `arce.out` va conține pe prima linie numărul cerut în enunț.

Exemplu

arce.in	arce.out	Explicație
7 8 1 2 5 6 6 5 2 3 3 2 6 7 5 1 3 1	4	Graful conține 3 componente conexe. Componenta conexă cu cele mai multe arce are nodurile 1, 2, 3 și 4 arce.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 89 (lant). Se dă un graf neorientat conex cu n noduri și m muchii. Pentru acest graf se dorește determinarea unui lanț elementar care să conțină toate nodurile grafului, dacă există.

Cerință

Cunoscând n noduri și cele m muchii se cere să se determine un lanț elementar care să conțină toate nodurile grafului.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$

Date de intrare

Fișierul `lant.in` conține pe prima linie n și m separate printr-un spațiu, apoi pe următoarele m linii nodurile muchiilor separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `lant.out` va conține pe prima linie nodurile lanțului din cerință separate prin câte un spațiu. Dacă nu există un astfel de lanț se va scrie cifra 0.

Exemplu

lant.in	lant.out	Explicație
4 5 3 4 1 2 1 4 2 4 2 3	4 3 2 1	Pot exista mai multe lanțuri cu proprietatea din enunț, dar se va afișa doar unul dintre ele.

Doru Constantin, Pitești

I 90 (arbore). Se dă un arbore cu n noduri prin vectorul tată. Verificați dacă arborele este binar sau nu. În caz afirmativ se cere determinarea vectorilor stânga – dreapta construiți după regulile:

- dacă un nod k are doi fii i și j cu $i < j$, atunci i este fiu stâng, iar j este fiu drept;
- dacă un nod k are un singur fiu i, atunci i este fiu stâng, dacă i este impar și i este fiu drept dacă i este par.

Cerință

Cunoscând n și componentele vectorului tată, afișați DA, dacă arborele este binar, respectiv NU contrar pe prima linie. Dacă arborele este binar, atunci pe a doua linie se va scrie vectorul stânga, iar pe linia a doua vectorul dreapta.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$

Date de intrare

Fișierul `arbore.in` conține pe prima linie n și pe linia a doua vectorul tată.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `arbore.out` va conține pe prima linie DA sau NU cu semnificația din enunț. Dacă arborele este binar, atunci pe a doua linie se va scrie vectorul stânga, iar pe linia a doua vectorul dreapta.

Exemplu

arbore.in	arbore.out	Explicație
4 5 2 0 2 3 5 2 0 2 5 2 2 4 2 3	DA 0 1 0 0 0 3 4 0 NU	Rădăcina arborelui este 0 și orice nod are cel mult doi fii.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII

Donald Knuth și dolarul hexazecimal

Tudor Bălănescu[1]

Literatura de tip monografic a ultimelor 3 decenii ale secolului trecut era dominată, în domeniul *Computer Science*, de grandioasa operă multivolum elaborată de profesorul ***Donald Erwin Knuth*** de la Stanford University, considerat, printre altele, întemeietorul domeniului *Analiza complexității algoritmilor* și distins, pentru inestimabila sa contribuție științifică cu *ACM Turing award* (un fel de *Premiu Nobel* al informaticii teoretice). Intitulată *The Art of Computer Programming* această serie subliniază prin titlu și abordare convingerea autorului că actul de programare este în esență unul cu un pronunțat caracter creativ și orientat mai degrabă către om nu numai către calculator (paradigma *literate programming*).

Pentru identificarea eventualelor erori strecurate în lucrările elaborate, Knuth decide să recompenseze printr-un cec (de valoare negociabilă) orice sugestie semnificativă de îmbunătățire a textelor sale precum și fiecare semnalare a unei greșeli, indiferent de natura acesteia (tehnică, tipografică etc.). Până în 2001 emisese deja cam 2000 de cecuri, cu o valoare medie de cam 8$ (USA) pe cec. Majoritatea acestora nu au fost încasate, beneficiarii mulțumindu-se cu satisfacția de a fi corectat pe marele Donald Knuth. Desigur au existat și încasări reale. Printre ,,vânătorii" de erori circula chiar o butadă: este o dovadă de inteligență să descoperi o greșeală la Knuth, dar ar fi o prostie sa-i iei banii. Până la urmă, cecurile cu semnătura celebrului autor au devenit doar trofee mult râvnite în comunitatea informaticienilor.

Cu vremea, pentru a se apăra de intențiile de ,,fraudă", Knuth a mutat în 2008 ,,afacerea" într-un imaginar paradis fiscal numit *San Serriffe* a cărui monedă era *dolarul hexazecimal* (notat 0×$), evaluat la 256 cents ... (100_{HEX} cents), paritatea fiind deci 0×$1 = USD2.56 . Desigur, banca din San Serriffe avea sucursale în Blefuscu, Elbonia dar și pe planeta Pincus. Renunță la negociere și instituie un ,,tarif" mai exact de recompensare: de pildă, sugestiile de îmbunătățire erau evaluate cu 32 cents (adică 0.2_{HEX} dintr-un dolar hexazecimal). Conform bilanțului din 11 februarie 2021, soldul celui mai consistent cont al bancii este 0×$9f2.78. Există câteva sute de alte conturi, de valori mai mici, multe dintre acestea aparținând unor români (cel mai bine situat, cu 0×$54.e0, Gheorghe Liviu Lalescu).

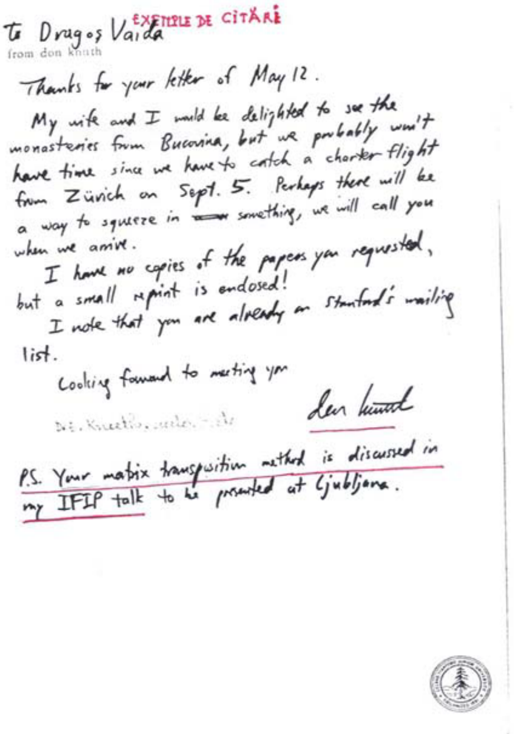
Izvorâtă parțial din dorința autorului de a aduce o fărâmă de amuzament în preocupările serioase ale matematicienilor și informaticienilor, inițiativa s-a dovedit a fi, printre altele, un foarte inteligent instrument de promovare a preocupărilor științifice ale unuia dintre prestigioșii cercetători ai domeniului Computer Science.

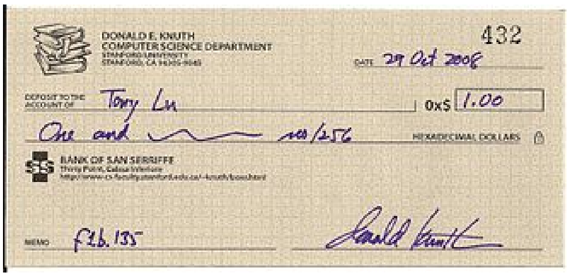
Donald Knuth a avut o relație consistentă cu matematicienii și informaticienii români. La începutul anilor 70' a participat la congresul *Logic, Methodology and Philosophy of Science*

[1]Prof. univ. dr., Universitatea din Pitești, tudor_balanescu@yahoo.com

IV, Proceedings of the Fourth International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971 (P. Suppes, L. Henkin, A. Joja, Gr.C. Moisil), după cum mărturisește profesorul Dragoș Vaida în [4]: ,,am fost împreună la recepția oferită de Ceaușescu la Palatul Victoria și am fost de față la discuția celor doi.”

Ca foști studenți și tineri (în acea vreme) colaboratori ai lui Dragoș Vaida, eram mândri de considerația pe care Donald Knuth o acorda mentorului nostru. Iar măsura în care Arta programării calculatoarelor a influențat destinul științific al multor generații de matematicieni și informaticieni ne apare astăzi mai limpede.





Bibliografie

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Knuth_reward_check`

[2] `https://www-cs-faculty.stanford.edu/~{}knuth/news08.html`

[3] Dragoș Vaida, *Profesorul Constantin P. Popovici și bazele informaticii*, în *Dragoș Vaida, un profesor participant la istorie*, editori: *Cristian S. Calude, Marian Gheorghe, Afrodita Iorgulescu, Gheorghe Păun* , Editura Tiparg, 2020, Pitești.

[4] Marin Vlada, *Dragoș Vaida – Matematica și informatica, în consonanță*, vol. III, Istoria informaticii românești (coord. M. Vlada), Ed. MatrixRom, 2020, pag. 354-362.

Revistă sponsorizată de

ROWEB Development SRL

și

OSF Global Services SRL