DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul II, nr. 3 / 2019

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ, UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacţia: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești, Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: `http://matinf.upit.ro`

Publicată de: Editura Universității din Pitești

`https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura`

Anul II, Nr. 3, August 2019

Cuprins

DIN ACTIVITATEA DEPARTAMENTULUI

Prezentarea Concursului de Programare ,,OSF – UPIT Hackathon” 2019, Ediția I, 15-22 martie 2019

Maria Miroiu [1]

Compania S.C. **OSF Global Services** S.R.L., în colaborare cu **Departamentul Matematică-Informatică** al Facultății de Științe, Educație Fizică și Informatică din cadrul Universității din Pitești, a organizat, în perioada **15-22 martie 2019**, prima ediție a concursului “OSF-UPIT Hackathon”. În ziua de 19 martie 2019 a avut loc o întâlnire pentru verificarea progresului proiectului și evaluare intermediară, iar jurizarea și premierea au avut loc în data de 22 martie 2019. Prin acest concurs, s-a încurajat și cultivat gândirea creativă și spiritul inovativ al studenților cu pregătire specifică, completându-se cu noțiuni de leadership, marketing sau management.

OSF-UPIT Hackathon 2019 s-a adresat studenților înmatriculați la specializările Departamentului Matematică-Informatică din cadrul Universității din Pitești. Au participat **38 de studenți** de la domeniul de **licență Informatică**, respectiv de la **programul de masterat** în limba engleză “**Advanced Techniques in Information Processing**”, grupați în **9 echipe** de câte 2-6 membri.

Consursul de programare a vizat propuneri de soluții tehnologice în beneficiul comunității, dezvoltând o aplicație web sau mobilă pentru **îmbunătățirea comunicării dintre primăria Pitești și cetățeni**, prin **Centralizarea incidentele raportate la nivel de oraș**.

Pentru implementare, se puteau folosi la alegere tehnologii back-end precum: PHP, Python, Ruby, NodeJS, Backbone JS, Angular, React JS, Java, .Net, baze de date, Android / iOS, Google Firebase ș.a., respectiv tehnologii front-end precum: framework-uri HTML / JS / CSS (Bootstrap, Foundation, Material UI, Semantic UI etc), Android / iOS, animații WebGL, Canvas sau JS etc.

Componența juriului desemnat a fost următoarea:

1. conf.univ.dr. Doru Constantin, conf.univ.dr. Doru Anastasiu Popescu, lect.univ.dr. Viorel Păun, lect.univ.dr. Maria Miroiu - cadre didactice ale Departamentului Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești;
2. Constantin Neață (.NET Team Leader), Claudiu Țicu (Front-Technical Lead), Mihai Vâlcu (Back-End Solution Architect) și Dragoș Șerbănescu (Front-End Solution Architect) - specialiști ai companiei OSF Global Services.

Juriul a stabilit următoarele **criterii de evaluare a proiectelor**: prezentarea proiectului, gradul de complexitate și funcționalitate a aplicației, nivelul UX, calitatea codului, nivelul de creativitate, documentația tehnică și documentația pentru testare. În urma aplicării acestor

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

criterii, s-au acordat punctaje corespunzătoare, fiecare criteriu având un punctaj între 1 și 5 puncte.

Premiile oferite în cadrul concursului de către compania OSF Global Services au fost în valoare totală de 4800 de lei:

1. locul I: 2000 RON;
2. locul II: 1200 RON;
3. locul III: 600 RON;
4. două premii speciale în valoare de 500 lei fiecare.

La prezentarea aplicațiilor a participat o delegație de la Universitatea din Veliko Turnovo, Bulgaria, motiv pentru care prezentările aplicațiilor au fost făcute în limba engleză.

1. **Premiul I** a fost câștigat de echipa **Trustart** compusă din studenții Uzum Mario-Claudiu, Anghel Valentin-George, Roceanu Mihai și Oprea Gabriel;
2. **Premiul al II-lea** a fost câștigat de echipa **NullPointException**, compusă din studenții Oprea Romică Marius, Saru Cornel Ionuț și Iordan Ionuț Cătălin;
3. **Premiul al III-lea** a fost câștigat de echipa **Aricii** compusă din studenții Prostoiu Daniel-Constantin și Radu Florin-Georgian;
4. **Premii speciale** au fost câștigate de echipa **Alpha Stage Crew** compusă din studenții Staicu Mircea Adrian, Ciolcă Andrei-Iulian și Zamfir Andrei-Gabriel, respectiv echipa **CodingBees** compusă din studentele Rotaru (Cîrstoiu) Elena Daniela, Turcin Maria Melania, Colțeanu Ana Maria Andreea și Andrei Ana Maria.

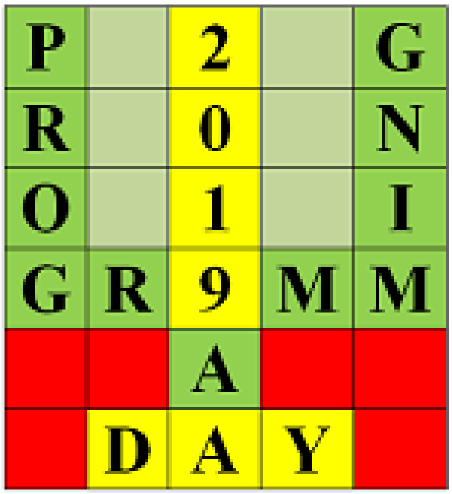
Celelalte echipe participante au fost: echipa **Noi** compusă din studenții Gulie Pantelimon, Goșoiu Cosmin Iulian, Măntăluță Bogdan Ionuț, Nicolescu Mihai Robert, Marin Marian Puiu și Rachieru Dragoș-Mihai, echipa **Deities** formată din studenții Chiriac Sebastian-Ionuț, Nițescu Cornel-Ionuț, Matei Marian Alexandru, Bădiloiu Marian Cristian Răzvan, Nedelea Eugen Cristian și Anghel Nicolae Marian, echipa **Șarpe04** formată din studenții Dumitru Constantin Damian, Ion Adrian-Ionuț, Ene Ionuț-Remus, Dedițoiu Alexandru-Valentin, Gherman Radu-Marian și Voiculescu Marian-Mădălin, respectiv echipa **Rag-Tag Circus** formată din studenții Fulger Manuel-Gabriel, Băncescu Victor-Ștefan și Stoian Alexandru-Cosmin.

Dincolo de premiile în bani oferite echipelor câștigătoare, concursul "OSF-UPIT Hackaton" 2019 a oferit o oportunitate pentru toți studenții care își doresc o carieră în IT să își testeze limitele și să experimenteze ce înseamnă să lucreze pe un proiect real, cu suport tehnic continuu din partea companiei OSF Global Services.

Prezentarea Concursului de Informatică ,,Programming Day for High School", Ediția a III-a, Pitești, 18 mai 2019

Doru Anastasiu Popescu [1], *Costel Bălcău* [2] *și Doru Constantin* [3]

Departamentul Matematică - Informatică al Universității din Pitești a organizat a treia ediție a concursului de programare clasică (folosind limbajele Pascal/C/C++ - Mediul de programare Code::Blocks) cu numele ,,Programming Day". La această ediție au participat elevi de la unități școlare din județele Arges, Vâlcea și Olt. În continuare prezentăm problemele date în concurs împreună cu indicații de rezolvare. Acestea au fost elaborate de Conf. univ. dr. Doru Constantin, Conf. univ. dr. Doru Anastasiu Popescu, Conf. univ. dr. Costel Bălcău - Universitatea din Pitești și Gabriel Boroghină - student la Universitatea Politehnică din București.



Premiile câștigătorilor au fost sponsorizate de firma ROWEB Development, director general Viorel Costea (profesor de Informatică) și de firma Velox Logistics Center, director economic Adriana Neaga.

Concursul de programare clasică

Acesta a fost organizat pe trei secțiuni, corespunzătoare clasei a IX-a, clasei a X-a și claselor a XI-a și a XII-a. Concurenții au avut de rezolvat câte două probleme, fiecare având un punctaj de 100 de puncte.

Clasa a IX-a

Problema 1 – lanturi

Se dă un tablou bidimensional cu M linii și N coloane în care elementele sunt 0 sau 1. Două elemente din tabloul bidimensional sunt vecine dacă ele se află pe aceeași linie și pe coloane consecutive sau pe aceeași coloană și pe linii consecutive. Definim noțiunea de *lanț* ca fiind o succesiune maximală de cifre egale cu 1, vecine două câte două.

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com
[2]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com
[3]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, doru.constantin@upit.ro

Pentru exemplul din Figura 1 avem exact 4 lanțuri (marcate prin segmente).

1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Fig. 1: Exemple de lanțuri.

Cerință

Cunoscând M, N și elementele tabloului bidimensional se cere:

1. numărul maxim de elemente 1 ce se găsesc pe o aceeași linie;
2. numărul de lanțuri.

Date de intrare

Fișierul de intrare `lanturi.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află M și N, iar pe următoarele M linii câte N cifre de 0 și 1, separate prin câte un spațiu, ce reprezintă elementele tabloului bidimensional.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, se va rezolva numai punctul 1) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `lanturi.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul maxim de elemente 1 ce se găsesc pe aceeași linie.

Dacă valoarea lui p este 2, se va rezolva numai punctul 2) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `lanturi.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de lanțuri din tablou.

Restricții și precizări

- $1 \leq M, N \leq 300$
- Pentru toate datele de intrare se garantează faptul că în tabloul dat orice element egal cu 1 are cel mult doi de 1 vecini
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 25% din punctaj, iar pentru cerința 2 se acordă 75% din punctaj

Exemple

`lanturi.in`	`lanturi.out`	Explicație
1 5 10 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	5	$p = 1$ Linia 1 are 4 cifre de 1, liniile 2, 3 și 4 au câte 5 cifre de 1, iar linia 5 o cifră de 1. Astfel 5 este numărul maxim de cifre de 1 de pe o linie.
`lanturi.in`	`lanturi.out`	Explicație
2 5 10 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	4	$p = 2$ Există exact 4 *lanțuri* în tablou.

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.
Memorie totală disponibilă 4 MB.
Dimensiunea maximă a sursei: 5 KB.

Soluție

Pentru rezolvarea primei cerințe se va determina pentru fiecare linie suma elementelor s (care reprezintă numărul de 1) și apoi se compară s cu o variabila Max, care inițial este 0. Dacă $s > Max$, atunci $Max = s$. Valoarea finală a lui Max se va afișa.

Pentru cerința a doua se parcurg elementele tabloului și când se găsește un element egal cu 1 se incrementează o variabilă Nr cu 1 (aceasta reprezintă numărul de lanțuri, inițial având valoarea 0) și se merge pe lanțul ce îl conține pe acesta (posibil, pe rând, în două direcții), elementele parcurse transformându-se din 1 în 0. După parcurgerea elementelor tabloului se va afișa Nr.

Problema 2 – rain
Pe o plantație s-au amplasat sisteme pentru analiza umidității, care detectează picăturile de ploaie ce cad pe pământ în raza lor de acțiune. Un astfel de sistem poate fi reprezentat printr-un segment de dreaptă ce conține senzori de la 1 la M (amplasați uniform de-a lungul segmentului). Un senzor detectează toate picăturile care cad pe dreapta perpendiculară pe segmentul sistemului de analiză în acel punct și reține indexul senzorului unde a căzut picătura. Senzorii sunt foarte mici și deși, astfel încât o picătură de ploaie va pica întotdeauna exact în raza unui singur senzor.

După fiecare secundă, sistemul trimite datele înregistrate la un calculator pentru a fi interpretate. După T secunde, expertul care analizează datele ar dori să afle care este distanța maximă dintre doi senzori între care nu a căzut nicio picătură de ploaie (acest lucru însemnând că zona respectivă nu a primit suficientă apă în urma celor T secunde).

Deoarece numărul de senzori și numărul de picături de ploaie înregistrate sunt mult prea mari pentru a fi analizate manual, expertul ar mai dori și ca programul de calculator să îi reducă numărul de senzori analizați, extrăgându-i numai pe cei cu indexul număr prim din primii K (el consideră că aceștia sunt suficienți pentru analiză), însoțiți de numărul de secunde în care aceștia au înregistrat picături de ploaie.

Cerință

Cunoscând M, T, K, precum și T vectori ordonați crescător, câte unul pentru fiecare secundă, cu indecșii senzorilor care au înregistrat cel puțin o picătură de ploaie în secunda respectivă, se cere:

1. distanța maximă dintre 2 senzori între care nu a căzut nicio picătură de ploaie (ca diferența dintre indecșii lor);
2. senzorii cu indexul număr prim și mai mic sau egal cu K, împreună cu numerele aferente de secunde în care au înregistrat picături de ploaie.

Date de intrare

Fișierul de intrare `rain.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Urmează o linie conținând cele 3 numere M, T și K, separate prin câte un spațiu.

Urmează T linii ce descriu picăturile de ploaie înregistrate în fiecare din cele T secunde. A i-a dintre aceste linii va conține mai întâi un număr N_i, reprezentând numărul de picături înregistrate în secunda i, urmat de N_i valori ordonate crescător (și distincte) indicând senzorii care au înregistrat cel puțin o picătură de ploaie în secunda i.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, se va rezolva numai punctul 1) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `rain.out` se va scrie un singur număr reprezentând distanța maximă dintre doi senzori între care nu a căzut nicio picătură de ploaie.

Dacă valoarea lui p este 2, se va rezolva numai punctul 2) din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire se va afișa pe prima linie numărul P de senzori cu indexul număr prim mai mic sau egal cu K. Pe următoarele P linii se vor afișa câte două numere, separate printr-un spațiu: primul reprezentând indexul senzorului, iar al doilea numărul de secunde în care senzorul respectiv a înregistrat picături de ploaie. Senzorii vor fi afișați în ordine crescătoare.

Restricții și precizări

- $1 \leq M \leq 10^9$, $1 \leq T \leq 20$, $1 \leq K \leq 10^6$, $K \leq M$
- $2 \leq N_i \leq 10^4$, $i = \overline{1, T}$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 50% din punctaj, iar pentru cerința 2 se acordă 50% din punctaj

Exemple

`rain.in`	`rain.out`	Explicație
1 13 2 5 3 2 8 10 3 2 4 5	3	$p = 1$ Senzorii care au detectat cel puțin o picătură de apă sunt: 2 4 5 8 10; distanța maximă este 8–5= 3. Un alt exemplu cu aceeași distanță este 13 − 10 = 3.
`rain.in`	`rain.out`	Explicație
2 13 2 5 3 2 8 10 3 2 4 5	3 2 2 3 0 5 1	$p = 2$ Din primii K=5 senzori, îi alegem pe cei cu index prim: 2 (secundele 1 și 2), 3 (nicio secundă) și 5 (secunda 2).

Timp maxim de execuție: 0.45 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 32 MB.
Dimensiunea maximă a sursei: 5 KB.

Soluție

Pentru prima cerință se interclasează cei T vectori și se determină răspunsul, ținând cont și de senzorii extremi, 1 și M. Pentru cerința a doua, se va genera, folosind *ciurul lui Eratostene*, un vector cu primele K numere prime. Pentru fiecare dintre acestea se determină numărul de apariții în vectorul interclasat.

Clasa a X-a

Problema 1 – cuvinte

Se dă un cuvânt C format numai din litere mari și un tablou bidimensional A cu M linii și N coloane, cu componente litere mari. Prin *anagramă* a lui C înțelegem un cuvânt obținut din C prin permutarea literelor sale.

Două elemente din tabloul bidimensional A sunt vecine dacă acestea se află pe aceeași linie și pe coloane consecutive sau pe aceeași coloană și pe linii consecutive. Definim noțiunea de *lanț* ca fiind o succesiune ordonată de elemente vecine, care nu se repetă (trece printr-un element din tablou o singură dată). Pentru cuvântul C = "VARA" și tabloul bidimensional A alăturat sunt marcate 4 lanțuri anagrame pentru C (dintr-un total de 10 lanțuri anagrame pentru C).

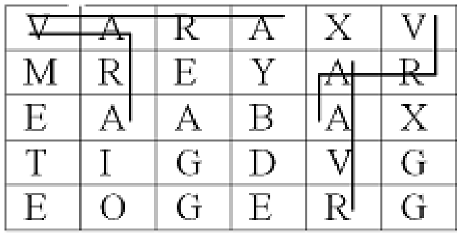


Fig. 2: Exemple de lanțuri.

Cerință

Cunoscând cuvântul C, dimensiunile M, N și elementele tabloului bidimensional A se cere:

1. numărul de apariții în tabloul A a ultimei litere din C;
2. numărul de lanțuri din tabloul A, care sunt anagrame ale cuvântului C.

Date de intrare

Fișierul de intrare `cuvinte.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află cuvântul C, pe linia a treia se află M și N separate printr-un spațiu, iar pe următoarele M linii câte N litere mari, fără spații între ele, ce formează tabloul A.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, se va rezolva numai punctul 1) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `cuvinte.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de apariții în tabloul A a ultimei litere din C.

Dacă valoarea lui p este 2, se va rezolva numai punctul 2) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `cuvinte.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de lanțuri din tabloul A, care sunt anagrame ale cuvântului C.

Restricții și precizări

- C are cel mult 10 litere
- $1 \leq M, N \leq 41$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 25% din punctaj, iar pentru cerința 2 se acordă 75% din punctaj

Exemple

`cuvinte.in`	`cuvinte.out`	Explicație
1 VARA 5 6 VARAXV MREYAR EAABAX TIGDVG EOGERG	6	$p = 1$ Ultima literă din cuvântul C (VARA) este A. A apare in tablou de 6 ori.

`cuvinte.in`	`cuvinte.out`	Explicație
2 VARA 5 6 VARAXV MREYAR EAABAX TIGDVG EOGERG	10	$p = 2$ *Lanțurile* din tabloul A care sunt *anagrame* pentru cuvântul C: VARA, VARA, ARAV, VRAA, AAVR, RAAV, ARAV, AARV, VAAR, RVAA.

Timp maxim de execuție: 0.15 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.
Dimensiunea maximă a sursei: 5 KB

Soluție

Pentru prima cerință, se parcurge tabloul A și se compară fiecare element cu ultima literă din cuvântul C. Dacă sunt egale se incrementează un contor. Pentru a doua cerință se generează toate lanțurile în paralel cu ștergerea caracterului respectiv din C. Când în lanț litera curentă nu este în C, generarea se încheie fără succes; dacă se ajunge la $C =$"" atunci avem un lanț anagramă și se contorizează.

Problema 2 – partsums

Paul este în vacanță și se plictisește. De aceea, încearcă să găsească un nou mod inedit de a-și petrece timpul. El scrie pe o foaie un șir format din N valori de 1. Apoi, sub acest șir calculează sumele parțiale: $1, 2, 3, \ldots, N$, obținând un nou șir de N numere. Deoarece plictiseala atinge cote maxime, alege la întâmplare un număr R și își propune să calculeze mental care este ultimul număr (al N-lea) din șirul obținut după aplicarea operației de R ori, calculând de fiecare dată șirul sumelor parțiale pentru șirul anterior. Își dă seama că este greu să determine această valoare, așa că decide doar să o estimeze, iar apoi să vadă cât de mult s-a apropiat de valoarea reală. Pentru a calcula valoarea exactă, ar avea nevoie de un program, lucru cu care vă roagă pe voi să îl ajutați.

Cerință

Dându-se N – numărul de valori din șir și R – numărul de repetări ale operației, se cere:

1. al treilea număr din șirul obținut după aplicarea operației de R ori, modulo 323333 (prim);
2. ultimul număr din șirul obținut după aplicarea operației de R ori, modulo 323333 (prim).

Date de intrare

Fișierul de intrare `partsums.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Urmează o linie conținând cele 2 numere N și R separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, se va rezolva numai punctul 1) din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire `partsums.out` se va scrie un singur număr reprezentând valoarea celui de-al 3-lea număr din șirul obținut după calcularea repetată de R ori a sumelor parțiale, modulo 323333.

Dacă valoarea lui p este 2, se va rezolva numai punctul 2) din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire se va scrie un singur număr reprezentând valoarea celui de-al N-lea număr din șirul obținut după calcularea repetată de R ori a sumelor parțiale, modulo 323333.

Restricții și precizări

- $3 \leq N \leq 4000$, $1 \leq R \leq 10^8$
- Pentru 20% din teste, $R \leq 500$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj, iar pentru cerința 2 se acordă 80% din punctaj

Exemple

`partsums.in`	`partsums.out`	Explicație
1 5 3	10	$p = 1$ După 3 operații, șirul obținut este: 1 4 10 20 35.
`partsums.in`	`partsums.out`	Explicație
2 5 3	35	$p = 2$ După 3 operații, șirul obținut este: 1 4 10 20 35.

Timp maxim de execuție: 0.15 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.
Dimensiunea maximă a sursei: 5 KB.

Soluție

Șirurile de numere obținute sunt coloanele tabloului bidimensional format de combinări (*triunghiul lui Pascal*). Astfel, al n-lea număr din șirul de la pasul R este de fapt egal cu $\text{comb}(R+n-1, n-1) = (R+1) * \ldots * (R+n-1)/(n-1)!$ (modulo 323333).

Clasele a XI-a și a XII-a

Problema 1 – grafuri

Se dau T grafuri neorientate notate cu $G_1, G_2, \ldots, G_T$, fiecare prin numărul de noduri, numărul de muchii și muchii. Spunem că un graf neorientat este *2–neconex echilibrat*, dacă are exact două componente conexe, ambele componente conexe având același număr de noduri. Un graf neorientat este *aproape* 2*–neconex echilibrat*, dacă prin adăugări de muchii (păstrând toate muchiile inițiale) se obține un graf 2*–neconex echilibrat*.

Cerință

Cunoscând numărul de grafuri T și datele pentru fiecare graf $G_1, G_2, \ldots, G_T$, se cer:

1. numerele de ordine (în ordine crescătoare) ale grafurilor care sunt 2*–neconexe echilibrate*;
2. numerele de ordine (în ordine crescătoare) ale grafurilor care sunt *aproape* 2*–neconex echilibrate*.

Date de intrare

Fișierul de intrare `grafuri.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe linia a doua se află T, numărul de grafuri, iar pe următoarele linii datele pentru fiecare graf neorientat în formatul: n_i m_i (numărul de noduri și numărul de muchii separate prin câte un spațiu) pe o linie și m_i muchii, pe câte o linie fiecare (capetele muchiilor fiind separate prin câte un spațiu), $1 \leq i \leq T$.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, se va rezolva numai punctul 1) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `grafuri.out` se vor scrie numerele de ordine (în ordine crescătoare) ale grafurilor neorientate care sunt 2-neconexe echilibrate.

Dacă valoarea lui p este 2, se va rezolva numai punctul 2) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `grafuri.out` se vor scrie numerele de ordine (în ordine crescătoare) ale grafurilor neorientate care sunt aproape 2-neconex echilibrate.

Restricții și precizări

- $1 \leq T \leq 20$; $1 \leq n_i \leq 200$, $1 \leq i \leq T$
- Orice graf 2-neconex echilibrat este și aproape 2-neconex echilibrat
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 40% din punctaj, iar pentru cerința 2 se acordă 60% din punctaj

Exemple

`grafuri.in`	`grafuri.out`	Explicație
1 3 4 2 1 2 3 4 7 4 1 3 2 6 1 7 7 5 6 1 1 4	1	$p = 1$ Primul graf neorientat este 2–*neconex echilibrat*, celelalte două grafuri nu sunt 2–*neconex echilibrate.*
`grafuri.in`	`grafuri.out`	Explicație
2 3 4 2 1 2 3 4 7 4 1 3 2 6 1 7 7 5 6 1 1 4	1 3	$p = 2$ Primul și al treilea graf neorientat sunt *aproape* 2–*neconex echilibrate.* Primul graf este 2–*neconex echilibrat* și implicit *aproape* 2–*neconex echilibrat.* Al doilea graf are două componente conexe, una cu 4 noduri și alta cu 2 noduri, deci nu este graf *aproape* 2–*neconex echilibrat.* La al treilea graf, dacă adăugăm, de exemplu muchiile [1,2], [3,5], [5,6] se obține un graf cu două componente conexe, fiecare cu câte 3 noduri, deci graful este *aproape* 2–*neconex echilibrat.*

Timp maxim de execuție: 0.1 secunde/test.
Memorie totală disponibilă 4 MB.
Dimensiunea maximă a sursei: 5 KB.

Soluție

Dacă numărul de noduri este impar, graful nu verifică nicio condiție dintre cele două definite în enunț. Pentru prima cerință folosim parcurgerea în lățime sau în adâncime, de cel mult de câte două ori pentru fiecare graf, pentru a depista primele două componente conexe. Astfel se determină numerele de noduri ale acestor componente Nr_1 și, eventual, Nr_2. Graful este 2–neconex echilibrat dacă $Nr_1 = n_i/2$ și $Nr_2 = n_i/2$.

La a doua cerință, pentru fiecare graf se determină un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ cu numerele de noduri din fiecare componentă conexă și, folosind *metoda programării dinamice*, se verifică dacă există componente din x cu suma egală cu $n_i/2$, aceasta fiind condiția ca graful să fie aproape 2–neconex echilibrat.

Problema 2 – music

Luca este un talentat cântăreț de pian. Mai nou, a început să și compună melodii. O melodie este reprezentată ca un șir de note muzicale (DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI). El folosește note din oricare dintre octavele $1 - K$ (adică notele pe care le poate adăuga sunt – în ordine crescătoare: DO_1, RE_1, MI_1, FA_1, SOL_1, LA_1, SI_1, ..., DO_K, RE_K, MI_K, FA_K, SOL_K, LA_K, SI_K).

Mai mult, Luca și-a creat chiar și propria metrică pentru calitatea unei melodii, bazată pe un *grad de armonie*. Acesta se determină astfel: se găsește cea mai înaltă notă din melodie (dacă sunt mai multe astfel de note, se alege cea mai din dreapta) și se calculează lungimea maximă a unui subșir de note crescătoare din intervalul [prima notă, nota cea mai înaltă] (*prologul melodiei*). Apoi se găsește cea mai joasă notă din melodie (dacă sunt mai multe astfel de note, se alege cea mai din dreapta) și se calculează lungimea maximă a unui subșir descrescător din intervalul [prima notă, nota cea mai joasă]. Gradul de armonie al melodiei va fi suma celor două lungimi + lungimea melodiei.

Luca și-a propus să compună o melodie cu gradul de armonie minim H. Însă deoarece era prea entuziasmat, a ajuns să creeze o melodie mult prea lungă (și nu vrea să plictisească pe nimeni cu o astfel de melodie). Așa că își dorește să scurteze melodia compusă, prin eliminarea unui sufix al său (zero sau mai multe note de la final).

Vă roagă să îl ajutați să determine care este lungimea maximă a unui sufix ce poate fi eliminat astfel încât melodia rezultată să aibă încă gradul de armonie minim H.

Cerință

Cunoscând N (lungimea melodiei inițiale), H, precum și secvența de note care compun melodia inițială, se cere:

1. lungimea maximă a unui subșir de note crescătoare din prologul melodiei inițiale;
2. lungimea maximă a unui sufix ce poate fi eliminat astfel încât melodia rezultată să își păstreze gradul de armonie cel puțin H.

Date de intrare

Fișierul de intrare `music.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Urmează o linie conținând cele 3 numere N, K și H, separate prin câte un spațiu. A treia linie conține cele N note ce compun melodia inițială, separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, se va rezolva numai punctul 1) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `music.out` se va scrie un singur număr, reprezentând lungimea maximă a unui subșir de note crescătoare din prologul melodiei inițiale.

Dacă valoarea lui p este 2, se va rezolva numai punctul 2) din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire se va scrie un singur număr - lungimea maximă a unui sufix ce poate fi eliminat astfel încât melodia rezultată să își păstreze gradul de armonie $\geq H$.

Restricții și precizări

- $3 \leq N$, $H \leq 10^5$, $K \leq 1000$
- Pentru 40% din teste, $3 \leq N$, $H \leq 4000$
- Se garantează că melodia inițială are gradul de armonie $\geq H$
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 40% din punctaj, iar pentru cerința 2 se acordă 60% din punctaj

Exemple

`music.in`	`music.out`	Explicație
1 7 10 6 DO_3 MI_1 RE_5 SI_7 MI_4 LA_2 SI_1	3	$p = 1$ Nota cea mai înaltă este SI_7. Cele mai lungi subșiruri crescătoare din prolog sunt DO_3, RE_5, SI_7 și MI_1, RE_5, SI_7, de lungime 3.
`music.in`	`music.out`	Explicație
2 7 10 6 DO_3 MI_1 RE_5 SI_7 MI_4 LA_2 SI_1	4	$p = 2$ Gradul inițial de armonie = 3 (subșirul crescător) + 2 (subșirul descrescător) + 7 (lungimea melodiei) = 12. Dacă eliminăm un sufix mai lung de 4, gradul de armonie devine ≤ 5.

Timp maxim de execuție: 0.25 secunde/test.
Memorie totală disponibilă:16 MB.
Dimensiunea maximă a sursei: 5 KB.

Soluție Pentru prima cerință se determină nota cea mai înaltă și, utilizând *metoda programării dinamice*, se găsește lungimea maximă a unui subșir crescător din prolog. Pentru cerința a doua se construiesc, utilizând *metoda programării dinamice*, un vector cu lungimile maxime ale unor subșiruri crescătoare din prologul curent și un vector cu lungimile maxime ale unor subșiruri descrescătoare din intervalul [prima notă, nota cea mai joasă], pe baza cărora se determină gradul de armonie al melodiei parțiale (subșirul format din primele i note), până când acest grad devine mai mare sau egal cu H.

Concursul de programare a roboților LEGO

Problema – robotică

La acest concurs a fost propusă următoarea problemă.

Durata deplasării: maxim 2 minute.

Punct de plecare: pătrat verde, iar robotul orientat în orice direcție, dar cu toate roțile pe verde.

Activitate robot: Pentru două cuburi date, de culoare roșu și galben, se cere să se împingă cuburile în zonele de culoare corespunzătoare (cubul galben în orice zonă de culoare galbenă, iar cubul roșu în zona de culoare roșie). Pentru împingerea pe suprafața corespunzătoare a unui cub se primesc 20 de puncte. Pentru a se obține cele 20 de puncte, trebuie ca toată suprafața de pe masă a cubului să fie în zona corespunzătoare culorii lui, iar pentru suprapunerea parțială a cubului în zona de culoare aferentă, se primește un punctaj de 10 puncte.

Oprirea robotului:

1. Implicit după 2 minute.
2. Când unul din concurenții strigă **stop**.
3. Când se oprește robotul sau când părăsește tabla.
4. Dacă robotul se oprește în locul de unde a plecat (cu toate roțile, inclusiv bila pe culoarea verde) atunci echipa mai primește 10 puncte.
5. Dacă se pune mâna pe robot.

Punctaj final:

Punctele se contorizează și la sfârșit constituie punctajul rundei. O echipă are 5 runde (încercări pe planșă), cel mai mare punctaj împreună cu timpul ei va fi folosit la întocmirea clasamentului.

Masa:

La masă acesul se face în ordinea sosirii unui membru al echipei. Robotul se așează la punctul de plecare și se pornește doar când un membru al juriului spune **start**, moment în care se pornește cronometrul.

Nicolae Bold, Slatina

Câștigătorii concursului PDHS 2019

Premianții concursului de programare clasică, respectiv de programare a roboților LEGO Mindstorms EV3 au fost:

Secțiunea A – clasa a IX-a: *Benghe Cristian*, Colegiul Național ,,I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul I; *Drăguțoiu Vlad*, Colegiul Național ,,I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea; *Brabu Robert*, Colegiul Național ,,I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea.

Secțiunea B – clasa a X-a: *Chiriac Cristian Alexandru*, Colegiul Național ,,I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul I; *Stoica Ioan*, Colegiul Național ,,I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea; *Şerbănel Alexandru Damian*, Colegiul Național ,,I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea.

Secțiunea C – clasele a XI-a și a XII-a: *Stanciu Gabriel Ciprian*, Colegiul Național ,,Radu Greceanu", Slatina, Olt, premiul I; *Gherghe Tomy*, Colegiul Național ,,Al. Odobescu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea; *Nicoară Bogdan-Cristian*, Colegiul Național ,,I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea.

Secțiunea R – Programarea roboților LEGO Mindstorms EV3: *Măldăreanu Mihai*, *Stanca Robert*, *Fierbântu Cosmin*, Școala Gimnazială ,,Ștefan Protopopescu", Slatina, Olt, premiul I.

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

Cum arătăm că două drepte sunt perpendiculare

Mihaela Molodeț [1]

În cele ce urmează, ne propunem să abordăm cele mai des întâlnite metode de a arăta că două drepte sunt perpendiculare, rezumându-ne doar la metodele folosite de elevii din gimnaziu, prin aplicații simple, care să ofere direcții de abordare în probleme de perpendicularitate.

1. Utilizăm definiția.

Aplicația 1. *În Figura 1,* $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$*. Se știe că* $m(\sphericalangle BAC) = 90°$*. Arătați că* $BC \perp DE$*.*

(Concurs „X-OL"- Olănești 2018, Mihaela Molodeț - enunț modificat)

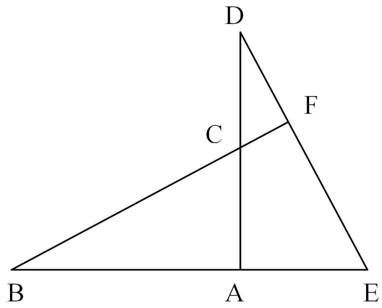


Figura 1

Demonstrație. Avem $\triangle ABC \equiv \triangle ADE \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADE$. Dacă $BC \bigcap DE = \{F\}$, atunci $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DCF$ - opuse la vârf. $\sphericalangle ACB$ este complementar cu $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle DCF$ este complementar cu $\sphericalangle FDC \Rightarrow m(\sphericalangle CFD) = 90° \Rightarrow BC \perp DE$. □

2. Folosim rezultatul ,,Înălțimile unui triunghi sunt concurente".

Justificare: Înălțimile $\triangle ABC$ sunt mediatoare în $\triangle A'B'C'$ format de punctele de intersecție ale dreptelor ce trec prin A, B, respectiv C și sunt paralele cu BC, AC, respectiv AB. Aceste mediatoare sunt concurente, deoarece punctul de intersecție dintre două mediatoare este egal depărtat de toate laturile.

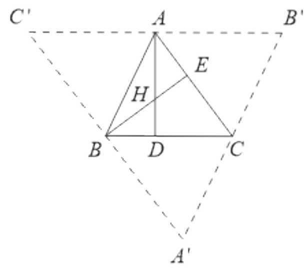


Figura 2

Aplicația 2. *În Figura 1,* $\triangle ABC \equiv \triangle ADE$*. Se știe că* $m(\sphericalangle BAC) = 90°$*. Arătați că* $CE \perp BD$*.*

(Concurs „X-OL"- Olănești 2018, Mihaela Molodeț - enunț modificat)

Demonstrație. Din rezultatul anterior, avem că $BC \perp DE$. Dar $DA \perp BE \Rightarrow$ în $\triangle BED$, C este ortocentru $\Rightarrow CE \perp BD$. □

[1]Profesor, Colegiul Tehnic Energetic ,,Remus Răduleț", Brașov, mihaela_personal@yahoo.com

3. Folosim rezultatul ,,Dacă dreptele sunt dreptele suport ale diagonalelor unui romb, atunci sunt perpendiculare".

Justificare: Rombul este un paralelogram, deci diagonalele sale se înjumătățesc. În Figura 3, $AO = CO \Rightarrow BO$ este mediană în $\triangle ABC$ care este isoscel $\Rightarrow BO$ este înălțime în $\triangle ABC \Rightarrow BO \perp AC$, adică $BD \perp AC$.

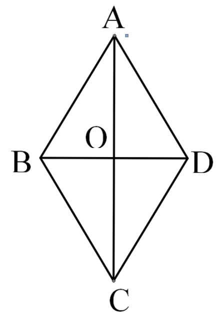


Figura 3

Aplicația 3. *În Figura 4 este schița unei table de joc $ABCD$, împărțită în 25 de pătrate colorate în alb și negru, fiecare pătrat având lungimea de 2 cm. Pe marginea tablei de joc sunt alese, ca în figură, punctele P, Q, M, N astfel încât $AP = BQ = CM = DN$. Arătați că dreptele MP și NQ sunt perpendiculare.*

(Simulare Evaluare Națională- 2014)

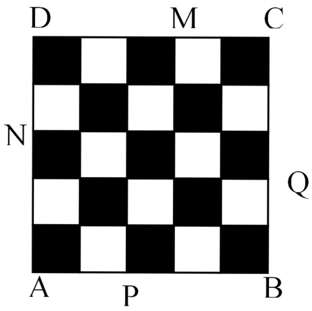


Figura 4

Demonstrație. $ABCD$ pătrat $\Rightarrow AB = BC = CD = DA$. Cum $AP = BQ = CM = DN$ $\Rightarrow PB = QC = MD = NA \Rightarrow \triangle APN \equiv \triangle BQP \equiv \triangle CMQ \equiv \triangle DNM$(cazul C.C.) $\Rightarrow NP = PQ = QM = MN \Rightarrow MNPQ$ romb $\Rightarrow MP \perp NQ$. □

4. Folosim rezultatul ,,Dacă aria triunghiului este egală cu semiprodusul dintre două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic".

Justificare: În Figura 5 avem că $A_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$. Presupunem că $AD \perp BC \Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} \Rightarrow AB = AD$ (altfel, în $\triangle ABD$ dreptunghic în D am avea că ipotenuza este congruentă cu o catetă, ceea ce este fals). Așadar $AB \perp BC$.

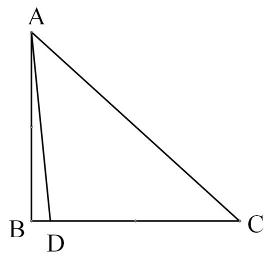


Figura 5

Aplicația 4. *În prisma patrulateră regulată $ABCDEFGH$ avem că $AB = 50\sqrt{2}cm$, $AE = 48cm$. Se alege punctul P pe $[EG]$ așa încât $9EP = 16GP$. Arătați că $PA \perp PC$.*

(Mihaela Molodeț)

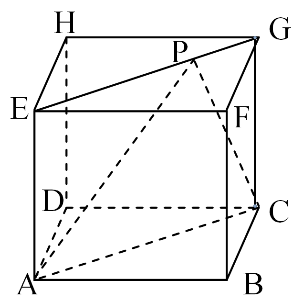


Figura 6

Demonstrație. $AC = EG = 100\text{cm}$ (TP în $\triangle ABC$) $\frac{EP}{GP} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{EP}{EG} = \frac{16}{25} \Rightarrow EP = 64\text{cm}$, $PG = 36\text{cm}$. $m(\sphericalangle AEP) = m(\sphericalangle CGP) = 90°$. Din Teorema lui Pitagora în $\triangle AEP$, respectiv $\triangle CGP$, $AP = 80cm, PC = 60\text{cm}$. $ACGE$ dreptunghi $\Rightarrow A_{\triangle PAC} = \frac{AC \cdot AE}{2} = 2400cm^2$. Dar $\frac{AP \cdot PC}{2} = 2400cm^2 \Rightarrow A_{\triangle PAC} = \frac{AP \cdot PC}{2} \Rightarrow PA \perp PC$. □

5. Folosim rezultatul „Dacă lungimea medianei este jumătate din latura care o determină, triunghiul este dreptunghic".

Justificare: În Figura 7 $AO = BO = CO$, $O \in BC \Rightarrow BC$ diametrul cercului circumscris triunghiului $ABC \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = \frac{1}{2} \cdot m\left(\overset{\frown}{BC}\right) = \frac{180°}{2} = 90°$.

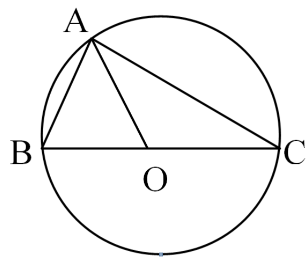


Figura 7

Aplicația 5. *În piramida patrulateră regulată $VABCD$, avem $VA = AB$. Arătați că $AV \perp CV$.*

(*Mihaela Molodeț*)

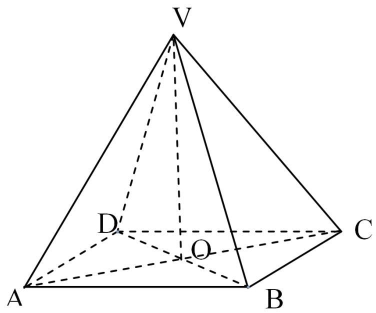


Figura 8

Demonstrație. $AO = CO = \frac{l\sqrt{2}}{2}$, $VA = l$, $VO \perp AO \Rightarrow VO = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ (Teorema lui Pitagora în $\triangle VAO$) $\Rightarrow AO = CO = VO \Rightarrow AV \perp CV$. □

6. Folosim egalitatea $3AG = BC$, unde G este centrul de greutate al $\triangle ABC$.

Justificare: Dacă AM mediană $\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM \Rightarrow BC = 3AG = 3 \cdot \frac{2}{3}AM = 2AM$, ceea ce ne aduce în situația de la punctul 5.

Aplicația 6. *$ABCD$ dreptunghi, O centrul său, iar E este simetricul lui D față de C. Notăm $OE \bigcap BC = \{F\}$. Dacă $AB = 3cm$, $CF = 1cm$, arătați că $BD \perp BE$.*

(*Mihaela Molodeț*)

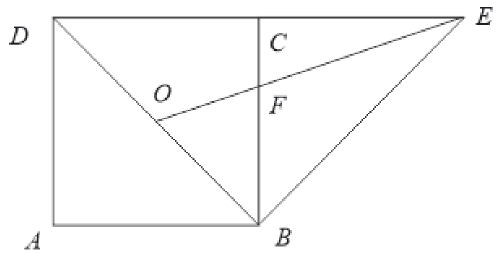


Figura 9

Demonstrație. F este centrul de greutate al triunghiului $\triangle BDE \Rightarrow BF = 2CF = 2cm$ $\Rightarrow 3BF = DE = 6cm \Rightarrow BD \perp BE$. □

7. Folosim rezultatul „Dacă două drepte sunt respectiv paralele cu alte două drepte perpendiculare, atunci și ele sunt perpendiculare".

Justificare: Unghiul format de prima pereche de drepte este același cu cel format de a doua pereche de drepte. Deci dacă dreptele din a doua pereche sunt perpendiculare, vor fi perpendiculare și dreptele din prima pereche.

Aplicația 7. *$ABCD$ este romb, iar $\{O\} = AC \bigcap BD$. Se construiește E simetricul lui O față de G, mijlocul laturii $[CD]$. Notăm cu F intersecția dreptelor AD și CE. Arătați că $DE \perp FE$.*

(Mihaela Molodeț)

Demonstrație. $CG = DG$, $OG = EG$ $\Rightarrow CODE$ paralelogram $\Rightarrow CE \parallel OD$ și $ED \parallel CO \Rightarrow CE \parallel BD$ și $DE \parallel AC$. Cum $AC \perp BD$ (diagonalele rombului sunt perpendiculare) $\Rightarrow DE \perp CE \Rightarrow DE \perp FE$. □

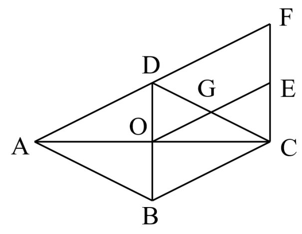


Figura 10

8. Folosim rezultatul $a \perp b$, $c \parallel a \Rightarrow b \perp c$.

Justificare: Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că dreptele sunt coplanare (altfel, translatăm proprietatea, prin paralelism, la drepte coplanare). $a \parallel c$, b secantă $\Rightarrow$ se formează unghiuri alterne interne (de exemplu) congruente, ca în Figura 11 $\Rightarrow b \perp c$.

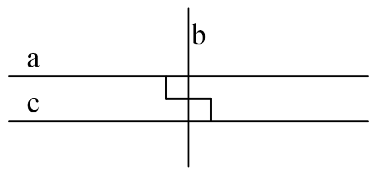


Figura 11

Aplicația 8. *În Figura 12 este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle BAD) = 90°$, $AB = 12cm$, $CD = 4cm$ și $AD = 8cm$. Punctul E aparține laturii AB astfel încât $AE = 4cm$ și punctul F aparține laturii AD, astfel încât $AF = 6cm$. Arătați că dreptele CE și FO sunt perpendiculare, unde $\{O\} = AC \bigcap BD$.*

(Simulare Evaluare Națională - 2019)

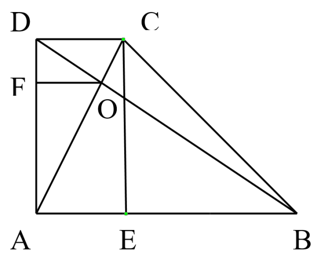


Figura 12

Demonstrație. $AB \parallel CD \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD$, deci $\frac{AO}{CO} = \frac{AB}{CD} = 3$. $\frac{AF}{DF} = 3$, deci $\frac{AF}{DF} = \frac{AO}{CO}$, de unde obținem $FO \parallel CD$. $AECD$ dreptunghi $\Rightarrow CE \perp CD \Rightarrow CE \perp FO$. □

9. Folosim rezultatul ,,Dacă una din drepte este bisectoare, mediană sau mediatoare într-un triunghi isoscel, iar cealaltă dreaptă este bază, atunci dreptele sunt perpendiculare”.

Justificare: În orice triunghi isoscel, bisectoarea, mediana și mediatoarea corspunzătoare bazei coincid cu înălțimea (proprietate a triunghiului isoscel).

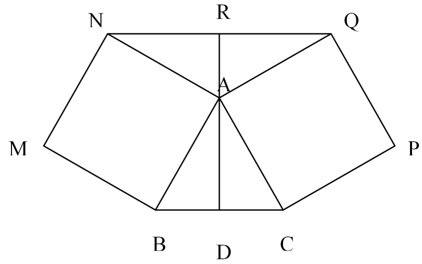


Figura 13

Aplicația 9. *Pe laturile triunghiului ABC echilateral se construiesc pătratele $ABMN$, respectiv $ACPQ$, ambele exterioare sau ambele neexterioare triunghiului. Fie D mijlocul lui $[BC]$. Arătați că $AD \perp NQ$.*

(Mihaela Molodeț)

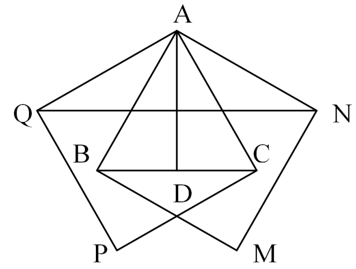


Figura 14

Demonstrație. Cazul I (Figura 13). $AQ = AC = AB = AN \Rightarrow \triangle AQN$ isoscel și $m(\sphericalangle NAQ) = 120^\circ (= 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 90^\circ)$. Fie R mijlocul lui $[NQ] \Rightarrow AR$ este bisectoarea $\sphericalangle NAQ \Rightarrow m(\sphericalangle NAR) = m(\sphericalangle QAR) = 60^\circ$. Cum $\triangle ABC$ este isoscel și D este mijlocul lui $[BC] \Rightarrow AD$ este bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow m(\sphericalangle DAC) = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle DAR) = m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle CAQ) + m(\sphericalangle QAR) = 180^\circ \Rightarrow D, A, R$ coliniare. Dar $AR \perp NQ \Rightarrow AD \perp NQ$.

Cazul al II-lea (Figura 14). $\triangle ABC$ echilateral, AD mediană $\Rightarrow AD$ este bisectoarea $\sphericalangle BAC$ $\Rightarrow m(\sphericalangle DAB) \equiv m(\sphericalangle DAC) = 30^\circ$. Cum $m(\sphericalangle QAB) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $m(\sphericalangle NAC) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle QAD) = m(\sphericalangle NAD) = 60^\circ$. Dar $AQ = AC = AB = AN \Rightarrow \triangle AQN$ isoscel $\Rightarrow AD \perp NQ$. $\square$

10. Folosim reciproca teoremei lui Pitagora.

Aplicația 10. *Se dă prisma triunghiulară regulată $ROESTI$. Cunoaștem că $RO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}cm$, $IE = a\sqrt{2}cm$ și U, N, V, C mijloacele laturilor $[RO], [IE], [ST]$, respectiv $[IV]$. Arătați că $NU \perp NC$.*

(,,Pretutindeni matematică" Roești 2019-Mihaela Molodeț - enunț modificat)

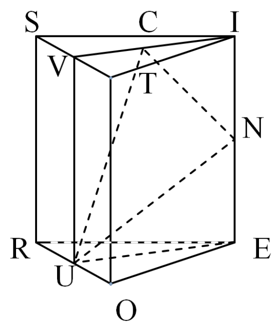


Figura 15

Demonstrație. $VU = SR = IE$, $VU \parallel SR \parallel IE \Rightarrow UEIV$ paralelogram. Din $IE \perp (ERO)$, $EU \subset (ERO) \Rightarrow IE \perp EU \Rightarrow UEIV$ dreptunghi. $EU = VI = a$, $CU^2 = \frac{9a^2}{4}$, $NC^2 = \frac{3a^2}{4}$, $UN^2 = \frac{6a^2}{4} \Rightarrow CU^2 = NC^2 + UN^2 \Rightarrow \triangle NUC$ dreptunghic în $N \Rightarrow NU \perp NC$. $\square$

11. Folosim rezultatul $B \in CD$, $d(A, CD) = AB \Rightarrow AB \perp CD$.

Justificare: Fie $AE \perp CD, E \in CD$. Dacă am presupune, prin absurd că $B \neq E$ (Figura 16), am avea că $d(A, CD) = AE \Rightarrow AE = AB \Rightarrow$ în $\triangle AEB$ dreptunghic în E ipotenuza are aceeași lungime cu o catetă, contradicție. Deci presupunerea este falsă $\Rightarrow B = E \Rightarrow AB \perp CD$.

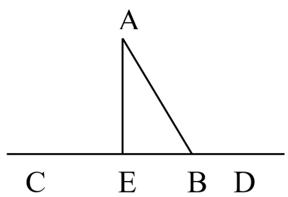


Figura 16

Aplicația 11. *În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cunoaștem $AB = 12cm$, $VO = 8cm$ (unde O este centrul bazei), M, N mijloacele laturilor AD respectiv BC și $P \in VM$ așa încât $PN = 9{,}6cm$. Arătați că $NP \perp VM$.*

(Mihaela Molodeț)

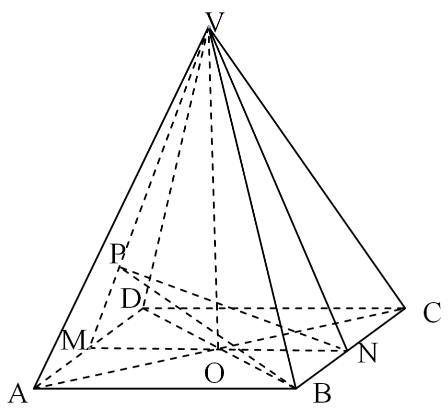


Figura 17

Demonstrație. $MN = AB = 12cm \Rightarrow A_{\triangle VMN} = 48cm^2$. Aplicând Teorema lui Pitagora în $\triangle VMO$, avem că $VM = 10cm \Rightarrow \frac{VM \cdot PN}{2} = 48cm^2 = A_{\triangle VMN} \Rightarrow d(N, VM) = NP \Rightarrow NP \perp VM$. □

12. Folosim Teorema celor trei perpendiculare.

Aplicația 12. *În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cunoaștem $AB = 12cm$, $VO = 8cm$ (unde O este centrul bazei), M, N mijloacele laturilor AD respectiv BC și $P \in VM$ așa încât $PN = 9{,}6cm$. Arătați că $BP \perp VM$.*

(Mihaela Molodeț)

Demonstrație. Folosind rezultatul anterior, avem că $NP \perp VM$. Dar $BN \perp MN$, $BN \perp VN \Rightarrow BN \perp (VMN) \Rightarrow BP \perp VM$ (conform Teoremei celor trei perpendiculare). □

13. Folosim rezultatul „Dacă una din drepte este perpendiculară pe un plan în care este inclusă a doua dreaptă, atunci dreptele sunt perpendiculare".

Justificare: Din definiția dreptei perpendiculare pe plan, aceasta este perpendiculară pe orice dreaptă inclusă în plan.

Aplicația 13. *În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N, R mijloacele segmentelor $[A'B]$, $[A'D]$ respectiv $[MN]$. Arătați că $A'C \perp AR$.*

(Concurs „Filofteia Preda"- Drăgășani, 2017, Mihaela Molodeț - enunț modificat)

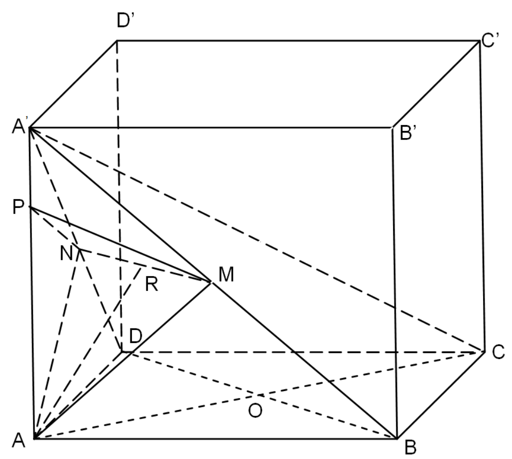


Figura 18

Demonstrație. $BC \perp (ABB'), AM \subset (ABB') \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp BC$. Dar $AM \perp BA'$ $\Rightarrow AM \perp (A'BC)$. Cum $A'C \subset (A'BC) \Rightarrow AM \perp A'C$. Analog rezultă $AN \perp A'C$, deci $A'C \perp (AMN)$. Cum $AR \subset (AMN) \Rightarrow A'C \perp AR$. □

14. Folosim proprietatea ,,Un trapez dreptunghic în care înălțimea este medie geometrică a bazelor este ortodiagonal".

Justificare: Luând $E \in AB$, ca în Figura 19, cu $EA = DC$, vom avea că $EACD$ paralelogram $\Rightarrow ED \parallel AC$. Cum $\triangle AED$ și $\triangle ADB$ sunt dreptunghice în A și $AD^2 = AE \cdot AB \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AD}$, deci $\triangle AED \sim \triangle ADB \Rightarrow \sphericalangle ADE$ și $\sphericalangle ADB$ complementare $\Rightarrow ED \perp DB$. Cum $ED \parallel AC \Rightarrow AC \perp BD$.

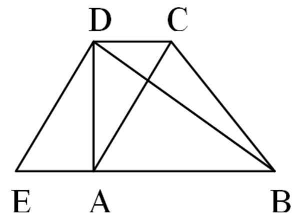


Figura 19

Aplicația 14. *În cubul $OLANESTI$, notăm mijlocul segmentului $[ET]$ cu litera R. Arătați că $OR \perp AE$.*

(Concurs „X-OL"- Olănești 2017, Mihaela Molodeț - enunț parțial)

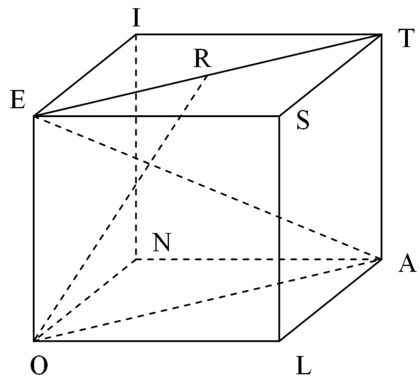


Figura 20

Demonstrație. $ER = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OA = a\sqrt{2}$, $EO = a \Rightarrow EO^2 = ER \cdot OA$. Cum $OARE$ este trapez dreptunghic, rezultă $OR \perp AE$. □

Desigur, nu am epuizat metodele folosite în demonstrații (vezi, de exemplu, una din reciprocele Teoremei înălțimii sau Teoremei catetei sau metode învățate la liceu). Materialul se dorește a fi util elevilor din clasa a VIII-a pentru pregătirea Evaluării Naționale, de aceea nici gradul de dificultate nu este unul ridicat, urmărind mai degrabă consolidarea și fixarea cunoștințelor și dobândirea unei dexterități în aplicarea teoriei, aceste demonstrații făcând parte, uneori, dintr-un raționament complex, riguros. Evident, demonstrarea perpendicularității unei drepte pe un plan sau a două plane se reduce la perpendicularitatea dreptelor.

Lăsăm cititorului bucuria de a descoperi, la aceleași probleme, alte metode de rezolvare.

An unusual configuration

Leonard Mihai Giugiuc [1]

Our goal in this paper is to find the admissible domain of k such that the inequality
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+ka_1^2a_2^2\dots a_n^2\geq n+k$$
does hold for any real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ satisfying $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j=\frac{n(n-1)}{2}$, where $n\geq 4$ is a fixed integer.

Preliminaries

1. $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq n$ or $a_1+a_2+\cdots+a_n\leq -n$. Indeed, as $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2\geq 0$, the conclusion follows immediately.

2. If $a_1, a_2, \dots, a_n$ are real numbers satisfying $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j=\frac{n(n-1)}{2}$ and $n\leq a_1+a_2+\cdots+a_n<(n-1)\sqrt{\frac{n}{n-2}}$, then all of them are strictly positive.

Indeed, set $a_1+a_2+\cdots+a_n=ns$, with $1\leq s<\frac{n-1}{\sqrt{n(n-2)}}$ so $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=n\left(ns^2-n+1\right)$, from which $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=ns-a_n$ and $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2=n\left(ns^2-n+1\right)-a_n^2$.

By Jensen's inequality, $(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^2\leq(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2\right)$. Thus, $(ns-a_n)^2\leq(n-1)\left[n\left(ns^2-n+1\right)-a_n^2\right]$, hence $a_n^2-2sa_n-n(n-2)s^2+(n-1)^2\leq 0$, then $s-(n-1)\sqrt{s^2-1}\leq a_n\leq s+(n-1)\sqrt{s^2-1}$ and as $1\leq s<\frac{n-1}{\sqrt{n(n-2)}}$, we have $s-(n-1)\sqrt{s^2-1}>0$, from which $a_n>0$. Analogously $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}>0$.

3. If $a_1, a_2, \dots, a_n$ are real numbers satisfying $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j=\frac{n(n-1)}{2}$ and $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq n$, then there exists $t\geq 1$ such that $a_1+a_2+\cdots+a_n=n\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)$.

4. We'll prove that $k\geq 0$. Indeed, let $k<0$. For every $t\geq 1$, set $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=t$ and $a_n=\frac{n-(n-2)t^2}{2t}$. Hence, we get $\displaystyle\sum_{i<j} a_ia_j=\frac{n(n-1)}{2}$, $a_1+a_2+\cdots+a_n=n\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)$ and $a_1a_2\dots a_n=\frac{t^{n-2}\left[n-(n-2)t^2\right]}{2}$. We have: $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=n^2\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2-n(n-1)$ and $a_1^2a_2^2\dots a_n^2=\frac{t^{2n-4}\left[n-(n-2)t^2\right]^2}{4}$. But
$$\lim_{t\to\infty}\left(n^2\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2-n(n-1)+k\cdot\frac{t^{2n-4}\left[n-(n-2)t^2\right]^2}{4}\right)=-\infty,$$

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Traian", Drobeta Turnu Severin, leonardgiugiuc@yahoo.com

hence the inequality $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+ka_1^2a_2^2\dots a_n^2\ge n+k$ is not fullfiled. In conclusion $k\ge 0$.

Lemma 1 (Crux problem 4121)**.** *Let $t\in\left[1,\sqrt{2}\right)$ be a fixed real number. We consider the positive real number a,b,c and d satisfying $a+b+c+d=2\left(\frac{t^2+1}{t}\right)$ and $ab+bc+cd+da+ac+bd=6$. Then* $\min(abcd)=t^2\left(2-t^2\right)$.

Lemma 2 (generalization of Lemma 1)**.** *Let $t\in\left[1,\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right)$ be a fixed real number. We consider the positive real numbers $a_1,a_2,\dots,a_n$ satisfying $a_1+a_2+\cdots+a_n=n\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)$ and $\sum\limits_{1\le i<j\le n}a_ia_j=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Then* $\min(a_1a_2\dots a_n)=\frac{t^{n-2}\left[n-(n-2)t^2\right]}{2}$.

Proof of the main result

Assume first that $a_1+a_2+\cdots+a_n\ge n$. Via the third preliminary we get $a_1+a_2+\cdots+a_n=n\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)$, with $t\ge 1$. Set $t\in\left[1,\sqrt{\frac{n}{n-2}}\right)$. According to the second preliminary, all $a_1,a_2,\dots,a_n$ are strictly positive. Hence via the Lemma 2, get

$$a_1a_2\dots a_n\ge\frac{t^{n-2}\left[n-(n-2)t^2\right]}{2}\Rightarrow a_1^2a_2^2\dots a_n^2\ge\frac{t^{2n-4}\left[n-(n-2)t^2\right]^2}{4}\Rightarrow$$

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+ka_1^2a_2^2\dots a_n^2\ge n^2\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2-n(n-1)+k\cdot\frac{t^{2n-4}\left[n-(n-2)t^2\right]^2}{4},$$

with equality for $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=t$. So

$$n^2\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2-n(n-1)+k\cdot\frac{t^{2n-4}\left[n-(n-2)t^2\right]^2}{4}\ge n+k,$$

that is $n^2\left(\dfrac{t^2-1}{2t}\right)^2\ge k\left(1-\dfrac{t^{2n-4}\left[n-(n-2)t^2\right]^2}{4}\right)$.

So if we set $t^2=x$, then $x\in\left[1,\frac{n}{n-2}\right)$ and the latter writes as

$$\frac{n^2(x-1)^2}{x}\ge k\left[4-n^2x^{n-2}+2n(n-2)x^{n-1}-(n-2)^2x^n\right].\quad(*)$$

Note that via the AM-GM inequality,

$$n^2x^{n-2}-2n(n-2)x^{n-1}+(n-2)^2x^n\le 4,\ \forall x\in\left[1,\frac{n}{n-2}\right).$$

Moreover, $n^2x^{n-2}-2n(n-2)x^{n-1}+(n-2)^2x^n=4$ if and only if $x=1$. Shall prove next that

$$n^2(x-1)^2\le\frac{n}{n-2}\cdot x\left[4-n^2x^{n-2}+2n(n-2)x^{n-1}-(n-2)^2x^n\right]\quad\forall x\in\left[1,\frac{n}{n-2}\right].\quad(**)$$

Further, equality holds if and only if $x\in\left\{1,\frac{n}{n-2}\right\}$. Inequality $(**)$ translates into

$$\left[(n-2)x-n\right]\left[(n-2)x^n-nx^{n-1}+nx-(n-2)\right]\le 0\forall x\in\left[1,\frac{n}{n-2}\right].$$

But $\dfrac{d}{dx}\left[(n-2)\,x^n - nx^{n-1} + nx - (n-2)\right] = n\,(x-1)^2\left[(n-2)\,x^{n-3} + \cdots + 2x + 1\right] \geq 0$ on $\left[1, \frac{n}{n-2}\right]$, so $(n-2)\,x^n - nx^{n-1} + nx - (n-2) > 0$, $\forall x \in \left(1, \frac{n}{n-2}\right)$. Clearly, $(n-2)\,x - n < 0$, for all $x \in \left(1, \frac{n}{n-2}\right)$, hence $(**)$ is proved. Consider the function $f : \left[1, \frac{n}{n-2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{n-2}, & \text{if } x = 1 \\ \frac{n^2(x-1)^2}{x\left[4 - n^2x^{n-2} + 2n(n-2)x^{n-1} - (n-2)^2x^n\right]}, & \text{if } 1 < x \leq \frac{n}{n-2}. \end{cases}$$

Clearly, f is continuous, positive, $f(1) = f\left(\frac{n}{n-2}\right) = \frac{n}{n-2}$ and via $(**)$, $f(x) < \frac{n}{n-2}$, for all $x \in \left(1, \frac{n}{n-2}\right)$. So by Weierstrass-Bolzano $\exists \left(0, \frac{n}{n-2}\right) \ni m = \min\limits_{x \in \left[1, \frac{n}{n-2}\right]} f(x)$ at some $x_0 \in \left(1, \frac{n}{n-2}\right)$. As $f(x) \geq m\ \forall x \in \left[1, \frac{n}{n-2}\right)$, we get that

$$\frac{n^2(x-1)^2}{x} \geq m\left[4 - n^2x^{n-2} + 2n\,(n-2)\,x^{n-1} - (n-2)^2x^n\right]\ \forall x \in \left[1, \frac{n}{n-2}\right).$$

Consequently, using $(*)$, if $t \in \left[1, \sqrt{\frac{n}{n-2}}\right)$, then $k_{max} = m$. Let $t \geq \sqrt{\frac{n}{n-2}}$. Then

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + ma_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n^2\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - n\,(n-1)\,.$$

But $n^2\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - n\,(n-1) \geq \frac{n(n-1)}{n-2}$, $\forall t \geq \sqrt{\frac{n}{n-2}}$. It remaining to show $\frac{n(n-1)}{n-2} \geq n + m \iff \frac{n}{n-2} \geq m$, which is true. We'll prove that $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + ma_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 \geq n + m$ for $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq -n$. But via the substitutions $a_i \to -a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ this case reduces to the studied one. For completing, we'll prove that the admissible domain of k is the interval $[0, m]$. Indeed, let $k \in [0, m]$. We have:

$$m\left[a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + ka_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 - (n+k)\right] - k\Big[a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$
$$+ma_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 - (n+m)\Big] = (m-k)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n\right).$$

As $m - k \geq 0$ and $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \geq 0$, then

$$m\left[a_1^2 + \cdots + a_n^2 + ka_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 - (n+k)\right] - k\left[a_1^2 + \cdots + a_n^2 + ma_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 - (n+m)\right] \geq 0.$$

But $k \geq 0$ and $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + ma_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 - (n+m) \geq 0 \Rightarrow$

$$m\left[a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + ka_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 - (n+k)\right] \geq 0$$

and since $m > 0$, then

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + ka_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 \geq n + k.$$

This completes the proof of the claim.

At the end, we'll specify that if $n = 4$ then $m = 7\sqrt{7} - 17$. Note that the problem in case $n = 4$ was opened by the author in 2016, but no one closed it till date.

Bibliography

`https://cms.math.ca/crux/v43/n3/Solutions_43_3.pdf`

Probleme de calcul integral. Inegalități integrale II

Florin Stănescu [1]

În acest articol vom prezenta *Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, în formă integrală, după care vor urma o serie de aplicații ale acestei inegalități.

- Inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*(*C-B-S*):
  Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcții integrabile, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}.$$

  Egalitatea are loc dacă $g = 0$, cu excepția, eventual, a unei mulțimi finite sau numărabile și f este arbitrară sau dacă $f = kg$, cu excepția, eventual, a unei mulțimi finite sau numărabile, $k \in \mathbb{R}$.

Aplicația 1. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$. Arătați că are loc inegalitatea:* $2\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2 \leq \int_0^1 (1-x^2)\,f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Soluție. Folosind formula integrării prin părți, avem: $\int_0^1\left(\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x = \int_0^1 x'\left(\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x$ $= \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x$. În continuare, utilizând inegalitatea *C-B-S,* putem scrie:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2 = \left(-\int_0^1\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x\right)^2 \leq \int_0^1 1^2\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^2\mathrm{d}\,x$$

$$\leq \int_0^1\left(\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}\,t\cdot\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x = \int_0^1 x\left(\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\left(\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right) \Rightarrow 2\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2 \leq \int_0^1 \left(1-x^2\right)f^2(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

[1]Profesor, Școala Gimnazială „Șerban Cioculescu”, Găești, florin.florinstanescu@yahoo.com

Aplicația 2. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu $f(1)=0$ și f' continuă. Arătați că:*

$$\int_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}\,x \geq 3\cdot\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2.$$

Soluție. Utilizând formula de integrare prin părți, avem:

$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 x'\cdot f(x)\,\mathrm{d}\,x=f(1)-\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}\,x=-\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}\,x$, de unde, prin intermediul inegalității *C-B-S*, avem:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2=\left(\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2\leq\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{3}\cdot\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}\,x.$$

Aplicația 3. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Arătați că :*

$$\int_0^1 f^2\left(x^2\right)\mathrm{d}\,x\geq\frac{7}{4}\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2.$$

Soluție. Cu schimbarea de varibilă $x^2=t$, obținem $\int_0^1 x^3 f(x^2)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x$, de unde

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2\leq\int_0^1 x^6\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 f^2\left(x^2\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{7}\cdot\int_0^1 f^2\left(x^2\right)\mathrm{d}\,x\Rightarrow$$

$$\int_0^1 f^2\left(x^2\right)\mathrm{d}\,x\geq\frac{7}{4}\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2.$$

Aplicația 4. *Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, demonstrați inegalitatea:*

$$\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{b-a}(f(a)+f(b))^2\geq\frac{8}{(b-a)^2}\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}\,x.$$

Soluție. Folosind $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, inegalitatea *C-B-S* și formula integrării prin părți, putem scrie:

$$\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}\,x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_x^{\frac{a+b}{2}} f'(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^2\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^2\mathrm{d}\,x$$

$$\leq\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\int_x^{\frac{a+b}{2}}(f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t\right]\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\int_{\frac{a+b}{2}}^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t\right]\mathrm{d}\,x$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[\left[\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2\right]'\int\limits_{x}^{\frac{a+b}{2}}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}\,t\right]\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]'\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{x}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}\,t\right]\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{8}(b-a)^2\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}\,x-\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}\,x$$

$$+\frac{1}{8}(b-a)^2\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}\,x-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}\,x.$$

Rezultă

$$\frac{1}{8}(b-a)^2\int\limits_{a}^{b}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}\,x \geq \int\limits_{a}^{b}\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}\,x$$

$$\underset{C-B-S}{\geq}\int\limits_{a}^{b}\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2(b-a)}\left(\int\limits_{a}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2(b-a)}\left(\frac{b-a}{2}f(b)+\frac{b-a}{2}f(a)-\int\limits_{a}^{b}f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}\,x+\frac{b-a}{8}\left(f(b)+f(a)\right)^2,$$

de unde

$$\int\limits_{a}^{b}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}\,x-\frac{1}{b-a}\left(f(a)+f(b)\right)^2 \geq \frac{8}{(b-a)^2}\int\limits_{a}^{b}\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}\,x.$$

Aplicația 5. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Demonstrați că:*

$$\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}f^2(x)\,\mathrm{d}\,x+2\left(\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2 \geq 3\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot\int\limits_{0}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Soluție. Fie $a\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}f^2(x)\,\mathrm{d}\,x+(2+3a)\left(\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2 \geq 3\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot\int\limits_{0}^{1}(x+a)\,f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Dacă $\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}\,x=t$, atunci $(2+3a)\,t^2-3t\int\limits_{0}^{1}(x+a)\,f(x)\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\geq 0 \Rightarrow$

$$\Delta_t=9\left(\int\limits_{0}^{1}(x+a)\,f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2-(2+3a)\int\limits_{0}^{1}f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\underset{C-B-S}{\leq} 9\cdot\int_0^1 (x+a)^2\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x-(2+3a)\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x=(1+3a)^2\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Astfel, pentru $a=-\frac{1}{3}$ obținem $\Delta_t\leq 0$, deci $(2+3a)\,t^2-3t\int_0^1 (x+a)\,f(x)\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\geq 0,(\forall)\,t\in\mathbb{R}\underset{a=-\frac{1}{3}}{\Rightarrow}\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x+2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2\geq 3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x.$

Aplicația 6. *Considerăm $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ două funcții integrabile, astfel încât $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}\,x=0$ și $\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x\neq 0$. Arătați că are loc inegalitatea:*

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x-\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2\geq\frac{\left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}.$$

Soluție. Folosind condiția din enunț si inegalitatea *C-B-S,* putem scrie:

$$\lambda\cdot\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 g(x)\cdot(1+\lambda f(x))\,\mathrm{d}\,x,(\forall)\,\lambda\in\mathbb{R},\text{ de unde}$$

$$\left(\lambda\cdot\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2=\left(\int_0^1 g(x)\cdot(1+\lambda f(x))\,\mathrm{d}\,x\right)^2\leq\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 (1+\lambda f(x))^2\,\mathrm{d}\,x$$

$$\Rightarrow\lambda^2\cdot\frac{\left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}\leq 1+2\lambda\cdot\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x+\lambda^2\cdot\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\Rightarrow\lambda^2\left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{\left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}\right)+2\lambda\cdot\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x+1\geq 0,(\forall)\,\lambda\in\mathbb{R}.$$

Cum $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{\left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}\geq 0$, atunci trinomul de gradul al doilea

$$F(\lambda)=\lambda^2\left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{\left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}\right)+2\lambda\cdot\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x+1$$

trebuie sa aibă discriminantul negativ, deci

$$4\cdot\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2 \le 4\cdot\left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{\left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x-\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2 \ge \frac{\left(\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2}{\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}.$$

Aplicația 7. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x=1$. Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\ge 4$.*

Soluție. În aplicația precedentă, pentru $g(x)=x-\dfrac{1}{2}$, ținând cont ca $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}\,x=0$ și $\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{12}$, obținem

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\ge\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2+3\cdot\left(\int_0^1 (2x-1)\cdot f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2=1+3=4.$$

Aplicația 8. *Dacă $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, demonstrați inegalitatea:*

$$\int_{-1}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\ge\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2+\frac{3}{2}\cdot\left(\int_{-1}^1 x\cdot f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2.$$

Soluție. Vom folosi inegalitatea: $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2\ge\frac{\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\right)^2}{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x}$, pentru $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x=0$, $\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x\ne 0$ (se efectuează substituția $\frac{x-a}{b-a}=y$ și se utilizează Aplicația 6).

Luând $g(x)=x$, avem $\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}\,x=0$, $\int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{3}$, deci rezultă inegalitatea din enunț.

Aplicația 9. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 (adică derivabilă cu derivata continuă) astfel încât $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=0$. Demonstrați inegalitatea:*

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x\le\frac{(b-a)}{2}\cdot\int_a^b \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}\,x.$$

Soluție. Din Teorema de medie, există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$. Putem scrie:

$$f(x) = \int\limits_c^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \underset{C-B-S}{\Rightarrow} f^2(x) \leq |x-c| \int\limits_c^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int\limits_a^b \left[|x-c| \int\limits_c^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t\right] \mathrm{d}\,x \leq \int\limits_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}\,x \cdot \int\limits_a^b |x-c|\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int\limits_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}\,x \cdot \left(c^2 - c(a+b) + \frac{a^2+b^2}{2}\right) \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int\limits_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}\,x.$$

Aplicația 10. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^1 *astfel încât* $f(a) = f(b) = 0$. *Arătați că:*

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int\limits_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}\,x.$$

Soluție. Pentru $x \leq \frac{b+a}{2}$, avem $f(x) = \int\limits_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \Rightarrow f^2(x) \leq (x-a) \int\limits_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t \Rightarrow$

$$\int\limits_a^{\frac{b+a}{2}} f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int\limits_a^{\frac{b+a}{2}} (f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t \cdot \int\limits_a^{\frac{b+a}{2}} (x-a)\,\mathrm{d}\,x = \frac{(b-a)^2}{8} \int\limits_a^{\frac{b+a}{2}} (f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t.$$

Analog, $\int\limits_{\frac{b+a}{2}}^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int\limits_{\frac{b+a}{2}}^b (f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t$, de unde $\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \frac{(b-a)^2}{8} \cdot \int\limits_a^b (f'(t))^2\,\mathrm{d}\,t$.

Bibliografie

[1] M. Andronache, R. Gologan, D. Schwarz, D. Șerbănescu, *Olimipiada de matematică 2006-2010*, Ed. Sigma, București, 2010.

[2] M.O. Drimbe, *Inegalități. Idei și metode*, Ed. Gil, Zalău, 2003.

[3] L.G. Lăduncă, *Borne pentru matematicieni, Algebră-Analiză, clasele IX-XII*, Ed. Taida, Iași, 2010.

[4] C. Mortici, *Bazele Matematicii. Teorie și exerciții*, Ed. Paralela 45, Pitești, 2016.

[5] N. Mușuroaia, Gh. Boroaica, *Analiză Matemtică pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență, Clasa a XII-a,* Ed. Paralela 45, Pitești, 2014.

[6] F. Stănescu, *Inegalități integrale. De la inițiere la performanță*, Ed. Paralela 45, Pitești, 2015.

[7] R.T. Rockafeller, *Analiză convexă*, Ed. Theta, București, 2002.

[8] Colecția Gazetei Matematice, Seria B.

Ecuația claselor. O aplicație

Victor Alexandru [1] *și Stelian Corneliu Andronescu* [2]

În cele ce urmează prezentăm succint relația de conjugare într-un grup $(G, \cdot)$, relație care, în cazul grupurilor finite, conduce la **ecuația claselor** asociată. Urmând un enunț prezent în [4] arătăm că ecuațiile de acest tip, având un număr dat de termeni, au un număr finit de soluții cu numere naturale nenule.

Ca aplicație se obține că există doar un număr finit de grupuri finite neizomorfe având un număr dat de clase de conjugare (fapt menționat de asemenea în [2] și atribuit lui Landau).

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $x, y \in G$. Dacă există $a \in G$ astfel încât $x = aya^{-1}$ spunem că x și y sunt *elemente conjugate* (în G) și notăm $x \sim y$. Se verifică ușor că relația „$\sim$" este reflexivă, simetrică, tranzitivă, adică este o relație de echivalență pe G.

Clasa de echivalență a unui element x, numită în acest caz *clasa de conjugare* a lui x, este $[x] = \{axa^{-1} | a \in G\}$. Evident clasa $[x]$ are ca unic element pe x dacă și numai dacă x comută cu orice $a \in G$, adică x se află în subgrupul $Z(G)$, *centrul* lui G. Notând $C(x) := \{a \in G | ax = xa\}$, subgrupul lui G denumit *centralizatorul* lui x, atunci avem $axa^{-1} = bxb^{-1} \Leftrightarrow b^{-1}a \in C(x)$, adică a și b sunt *congruente la stânga modulo* $C(x)$.

În consecință, dacă G este grup finit atunci clasa de conjugare a lui x, $[x]$, conține exact $[G : C(x)]$ elemente. Se notează astfel *indicele subgrupului* $C(x)$ în G și avem atunci $|G| = |C(x)|[G : C(x)]$, conform *Teoremei lui Lagrange*. Deoarece clasele de conjugare constituie o partiție a lui G, se obține următoarea teoremă:

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și $x_1, \ldots, x_n$ un sistem de reprezentanți pentru clasele de conjugare netriviale din G. Atunci

$$|G| = |Z(G)| + [G : C(x_1))] + \cdots + [G : C(x_n))].$$

Se observă că, în acest caz, grupul G are $n + |Z(G)|$ clase de conjugare, dintre care exact $|Z(G)|$ constau dintr-un singur element. Mai observăm de asemenea că, deoarece termenii din partea dreaptă a ecuației claselor sunt divizori ai lui $|G|$ ecuația se poate rescrie

$$1 = \frac{1}{|G : Z(G)|} + \frac{1}{|C(x_1)|} + \cdots + \frac{1}{|C(x_n)|}$$

sau încă sub forma

$$1 = \sum \frac{1}{|G|} + \frac{1}{|C(x_1)|} + \cdots + \frac{1}{|C(x_n)|}, \qquad (*)$$

unde suma $\sum \frac{1}{|G|}$ are $|Z(G)|$ termeni și astfel în partea dreaptă a egalității avem $|Z(G)| + n$ termeni, adică numărul claselor de conjugare din G. Egalitatea $(*)$ se numește *ecuația claselor atașată grupului* G.

[1] Prof. univ. dr., Universitatea din București, vralexandru@yahoo.com

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, corneliuandronescu@yahoo.com

2. În [4] se propune spre demonstrare următorul enunț:

Pentru orice $s \geq 1$ ecuația $1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{x_i}$ are un număr finit de soluții în $\mathbb{N}$.

Metoda de demonstrare începe prin a considera enunțul mai general: Pentru orice $s \geq 1$ și orice $a \in \mathbb{Q}_+$ ecuația $a = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{x_i}$ are un număr finit de soluții în $\mathbb{N}$, enunț care admite o demonstrație prin inducție după $s \geq 1$.

Pentru $s = 1$ avem $a = \frac{1}{x_1}$, ecuație ce admite (pentru a fixat) cel mult o soluție în $\mathbb{N}$.

Fie acum $s \geq 2$ și $x_1, x_2, \ldots, x_s$ soluție în $\mathbb{N}$ cu $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_s$. Atunci $\frac{1}{x_1} \geq \frac{1}{x_2} \geq \ldots \geq \frac{1}{x_s}$ de unde $\frac{s}{x_1} \geq \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{x_i} = a$, deci $x_1 \leq \frac{s}{a}$, adică x_1 poate lua cel mult $\frac{s}{a}$ valori în $\mathbb{N}$.

Pentru fiecare $x_1 \leq \frac{s}{a}$ avem $a - \frac{1}{x_1} = \sum_{i=2}^{s} \frac{1}{x_i}$, o ecuație de același tip cu cele inițiale dar cu $s-1$ variabile. Conform ipotezei de inducție, o astfel de ecuație are cel mult un număr finit de soluții $x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_s$ în $\mathbb{N}$. Deoarece chiar numărul acestor posibile ecuații este mărginit de $\frac{s}{a}$ obținem demonstrația prin inducție după $s \geq 1$.

Observația 1. Dacă $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_s$ este o soluție în $\mathbb{N}$ a unei ecuații de tipul considerat și care provine de la o ecuație $(*)$ a claselor atașată unui grup G atunci $x_s = |G|$; mai mult, ultimele $|Z(G)|$ dintre x_i sunt egalele lui $|G|$ iar toate celelalte sunt divizori proprii pentru $|G|$.

Pe de altă parte nu orice ecuație de forma $1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{x_i}$ ale cărei soluții în $\mathbb{N}$ verifică asemenea condiții de divizibilitate provine de la o ecuație a claselor de forma $(*)$. Un exemplu simplu este chiar $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$. Dacă ar proveni de la ecuația claselor de conjugare ale unui grup G, atunci $|G| = 4$ și G ar fi grup comutativ. Atunci ecuația $(*)$ trebuie să fie $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ deoarece $C(x) = G$ pentru orice $x \in G$.

3. Aplicație: Pentru orice $s \geq 1$ există un număr finit de grupuri finite neizomorfe G având exact s clase de conjugare.

Într-adevăr conform celor demonstrate la punctul 2 există doar un număr finit de posibilități pentru ordinul unui astfel de grup. Este însă binecunoscut că pe o mulțime finită cu cardinalul dat n se pot defini doar un număr finit de structuri de grup. De fapt chiar numărul operațiilor algebrice binare este limitat la n^{n^2}.

În final vom lua în considerare ecuații de forma $(*)$ $1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{p^{e_i}}$ unde p este număr prim. Astfel de ecuații apar în mod natural legate de ecuația claselor de conjugare într-un p-grup finit G, adică un grup finitt având $|G| = p^n$, $n \geq 1$. În acest caz este clar că forma $(*)$ a ecuației claselor este cea considerată. Este ușor de constatat că dacă $e_1 \leq \ldots \leq e_s$ și k este numărul acelor indici pentru care $e_i = e_s$ atunci p divide k. În fapt în cazul ecuației claselor se obține că $|Z(G)|$ se divide cu p și conform teoremei lui Lagrange avem $|Z(G)| = p^l$; $1 \leq l \leq e_s$.

Prin urmare dacă ecuația $1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{p^{e_i}}$ provine de la ecuația claselor asociată unui p-grup finit G, având s clase de conjugare, atunci $k = |Z(G)| = p^l$.

Pare a prezenta un anumit interes următorul exercițiu: Pornind de la o ecuație de forma $1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{p^{e_i}}$ cu s dat, să se determine $e_s = \max_{1 \leq i \leq s} e_i$ (în situația că avem k egal cu o putere supraunitară a lui p) sau, cel puțin, o majorare convenabilă pentru e_s. De remarcat că nu în mod necesar un asemenea e_s este astfel încât $p^{e_s} = |G|$ pentru un p-grup având s clase de conjugare. De exemplu pentru $s = 4$ avem $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$ dar această egalitate nu provine de la ecuația claselor unui grup cu $2^3 = 8$ elemente. Într-adevăr un asemenea G n-ar putea fi comutativ și pe de altă parte un grup necomutativ cu 2^3 elemente are exact cinci clase de conjugare. Se știe că în acest caz avem $G \simeq D_4$, grupul diedral al simetriilor pătratului,

$$D_4 = \{1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\} \text{ cu } x^4 = y^2 = 1 \text{ și } x^3y = yx,$$

sau $G = C_8$, grupul cuaternionilor,

$$C_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \text{ cu } i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ și } ijk = -1.$$

Spre exemplu ecuația $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ corespunde ecuației claselor din D_4 și C_8.

Observația 2. Este cunoscut faptul că un p-grup necomutativ cu p^3 elemente are exact $p^2 + p - 1$ clase de conjugare [1].

Bibliografie

[1] M. Becheanu, C. Vraciu, *Probleme de teoria grupurilor*, Editura Universității din București, 1982.

[2] J. Rose, *A Course on Group Theory*, Cambridge Univ. Press, 1978.

[3] T. Dumitrescu, *Algebra 1*, Editura Universității din București, 2006.

[4] W. Sierpinski, *250 Problems in Elementary Number Theory*, Elsevier, 1970.

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Grafuri neorientate 2-neconexe echilibrate

Ion Alexandru Popescu [1]

În acest articol ne propunem să introducem un caz particular de graf neorientat numit *graf 2-neconex echilibrat*. Apoi vom prezenta câteva rezultate teoretice împreună cu algoritmi ce verifică anumite proprietăți legate de această categorie de grafuri neorientate.

Noțiuni introductive

Definiția 1. *Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat, X mulțimea nodurilor, iar U mulțimea muchiilor. G se numește graf* ***2-neconex echilibrat*** *dacă verifică următoarele proprietăți:*

1) G conține exact două componente conexe $G_1 = (X_1, U_1), G_2 = (X_2, U_2)$;
2) $\mathrm{card}(X_1) = \mathrm{card}(X_2)$.

Exemplul 1. Fie $G = (X, U)$, cu $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $U = \{[1, 3], [2, 6], [1, 5], [4, 6]\}$. $G_1 = (X_1, U_1), X_1 = \{1, 3, 5\}, U_1 = \{[1, 3], [1, 5]\}$. $G_2 = (X_2, U_2), X_2 = \{2, 4, 6\}, U_2 = \{[2, 6], [4, 6]\}$. G_1 și G_2 sunt componente conexe și $\mathrm{card}(X_1) = \mathrm{card}(X_2) = 3$. Astfel G verifică proriețățile 1), 2) și este *2-neconex echilibrat*. În Figura 1 este reprezentat grafic graful G.

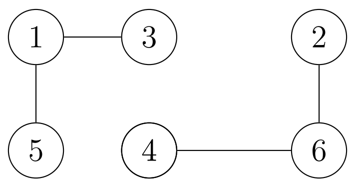


Fig. 1: Exemplu de graf neorientat *2-neconex echilibrat*.

Propoziția 1. *Dacă $G = (X, U)$ este un graf neorientat cu* $\mathrm{card}(X)$ *număr impar, atunci G nu este 2-neconex echilibrat.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există un graf neorientat $G = (X, U)$ cu $\mathrm{card}(X)$ număr impar, care este *2-neconex echilibrat*. G fiind *2-neconex echilibrat*, rezultă, din proprietatea 1) egalitatea $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(X_1) + \mathrm{card}(X_2)$, iar din 2) egalitatea $\mathrm{card}(X_1) = \mathrm{card}(X_2) = k$. Astfel, obținem $\mathrm{card}(X) = 2k$, adică număr par, deci contradicție cu $\mathrm{card}(X) =$ număr impar. $\square$

[1] Student, Universitatea din Pitești și A.S.E. București, alexionpopescu@gmail.com

Definiția 2. *Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat, X mulțimea nodurilor, iar U mulțimea muchiilor. G se numește graf* ***aproape 2-neconex echilibrat*** *dacă există o mulțime de muchii (posibil vidă) ce pot fi adăugate în G astfel încât noul graf notat cu G_{new} să fie 2-neconex echilibrat.*

Exemplul 2. Fie $G = (X, U)$ cu $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $U = \{[1, 3], [4, 6], [2, 6], [1, 5]\}$. G nu este *2-neconex echilibrat*, pentru că are 4 componente conexe, iar dacă adăugăm muchiile [5,8], [6,7] se obțin pentru G_{new} componentele conexe $G_1 = (X_1, U_1), X_1 = \{1, 3, 5, 8\}, U_1 = \{[1, 3], [1, 5], [5, 8]\}$. $G_2 = (X_2, U_2), X_2 = \{2, 4, 6, 7\}, U_2 = \{[2, 6], [4, 6], [6, 7]\}$. G_1 și G_2 sunt singurele componente conexe pentru G_{new} și $\text{card}(X_1) = \text{card}(X_2) = 4$. Astfel G_{new} este *2-neconex echilibrat*. Rezultă G este *aproape 2-neconex echilibrat*. În Figura 2 este reprezentat grafic graful G_{new}.

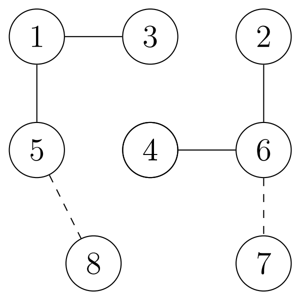


Fig. 2: Exemplu de graf neorientat *aproape 2-neconex echilibrat*.

Observația 1. Din definiția grafului *aproape 2-neconex echilibrat* rezultă că orice graf *2-neconex echilibrat* este și *aproape 2-neconex echilibrat*.

Algoritm pentru condiția de graf 2-neconex echilibrat

Vom considera un graf neorientat dat prin n - numărul de noduri, m - numărul de muchii și m perechi de noduri ce reprezintă muchiile. Nodurile vor fi etichetate cu numerele $1, 2, \ldots, n$.

Algoritmul pe care îl prezentăm în continuare folosește următoarele structuri de date:

1. Liste de adiacență $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$, L_i este lista cu nodurile adiacente cu i, $1 \leq i \leq n$.
2. Vector de vizitare a nodurilor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), v_i$ este 0, dacă nodul i nu a fost vizitat, respectiv 1, în caz contrar, $1 \leq i \leq n$.

Etapele algoritmului sunt următoarele:

I Citim n, m.
II Dacă n este impar, graful nu este *2-neconex echilibrat* și algoritmul se termină.
III Citim cele m muchii în variabilele i și j, după care introducem j în lista L_i, respectiv i în lista L_j.
IV Inițializăm componentele lui v cu 0.
V Parcurgem în lățime sau adâncime din nodul 1 graful dat folosind listele de adiacență (detalii în [6] sau [7]).
VI Determinăm în n_1 numărul de noduri vizitate (egal cu suma elementelor lui v).
VII Dacă n_1 este diferit de $n/2$, graful nu este *2-neconex echilibrat* și algoritmul se termină.

VIII Determinăm un nod i cu $v_i = 0$.
IX Parcurgem în lățime sau adâncime din nodul i graful dat folosind listele de adiacență.
X Calculăm în n_2 suma elementelor lui v (adică numărul de noduri vizitate după cele două parcurgeri).
XI Dacă $n_2 = n$ atunci graful este *2-neconex echilibrat*, altfel graful *nu este 2-neconex echilibrat*.

Observația 2. Algoritmul are timpul de execuție de ordinul $O(m + n)$.

Exemplu

Pentru graful neorientat din Exemplul 1 (Figura 1), variabilele din algoritm, după fiecare etapă, au următoarele valori:

I $n = 6$, $m = 4$.
II n este par.
III $L_1 = \{3, 5\}$, $L_2 = \{6\}$, $L_3 = \{1\}$, $L_4 = \{6\}$, $L_5 = \{1\}$, $L_6 = \{2, 4\}$.
IV $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$, $v_5 = 0$, $v_6 = 0$.
V $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, $v_3 = 1$, $v_4 = 0$, $v_5 = 1$, $v_6 = 0$.
VI $n_1 = 3$.
VII n_1 este egal cu $n/2$ ($n/2 = 6/2 = 3$).
VIII $i = 2$ (4 sau 5).
IX $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 1$, $v_4 = 1$, $v_5 = 1$, $v_6 = 1$.
X $n_2 = 6$.
XI $n_2 = n$ este echivalentă cu $6 = 6$, adevărat, deci graful este *2-neconex echilibrat*.

Algoritm pentru condiția de graf aproape 2-neconex echilibrat

Vom considera din nou un graf neorientat dat prin n - numărul noduri, m - numărul de muchii și m perechi de noduri ce reprezintă muchiile. Nodurile vor fi etichetate cu numerele $1, 2, \ldots, n$.

Algoritmul pe care îl prezentăm în continuare folosește următoarele structuri de date:

I Liste de adiacență $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$, L_i este lista cu nodurile adiacente cu i, $1 \leq i \leq n$.
II Vector de vizitare a nodurilor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, v_i este 0, dacă nodul i nu a fost vizitat, respectiv 1, în caz contrar, $1 \leq i \leq n$.
III Vectorul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, cu $k =$ numărul de componente conexe și $x_i =$ numărul de noduri a celei de-a i-a componentă conexă, $1 \leq i \leq k$.

Etapele algoritmului sunt următoarele:

I Citim n, m.
II Dacă n este impar, graful nu este *aproape 2-neconex echilibrat* și algoritmul se termină.
III Citim cele m muchii în variabilele i și j, după care introducem j în lista L_i, respectiv i în lista L_j.
IV Inițializăm componentele lui v cu 0 și k cu 0.
V Pentru fiecare nod i din mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, dacă $v_i = 0$ atunci $k = k + 1$ și parcurgem în lățime sau adâncime din nodul i graful dat folosind listele de adiacență și determinăm în x_k numărul de noduri vizitate (numărul de noduri din componenta conexă ce conține nodul i).

VI Folosind *metoda programării dinamice* se determină dacă există componente în vectorul x care au suma $n/2$ (ca la *problema rucsacului* - poate fi consultată în [1], [2], [3], [4]). Fie $M[i,g]$ = valoarea maximă a unei sume cel mult egală cu g formată cu elemente din $x_1, \ldots, x_i$, $0 \leq i < n$, $0 \leq g \leq n/2$. Avem $M[i,g] = 0$ pentru $i = 0$ sau $g = 0$ și

$$M[i,g] = \max\left\{M[i-1,g],\ x_i + M[i-1,g-x_i]\right\},\ \text{dacă } x_i \leq g,$$

$$M[i,g] = M[i-1,g],\ \text{dacă } x_i > g,$$

pentru $1 \leq i < n$, $1 \leq g \leq n/2$ (pentru implementare se poate utiliza un vector).

VII Dacă răspunsul la pasul VI este afirmativ, adică dacă există $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ astfel încât $M[i, n/2] = n/2$, atunci graful este *aproape 2-neconex echilibrat*. Altfel graful *nu este aproape 2-neconex echilibrat*.

Observația 3. Algoritmul are timpul de execuție de ordinul $O(n^2)$.

Exemplu

Pentru graful neorientat din Exemplul 2 (Figura 2) variabilele din algoritm, după fiecare etapă, au următoarele valori:

I $n = 8$, $m = 3$.
II n este par.
III $L_1 = \{3,5\}$, $L_2 = \{6\}$, $L_3 = \{1\}$, $L_4 = \{6\}$, $L_5 = \{1\}$, $L_6 = \{2,4\}$, $L_7 = \{O\}$, $L_8 = \{O\}$.
IV $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$, $v_5 = 0$, $v_6 = 0$, $v_7 = 0$, $v_8 = 0$, $k = 0$.
V $k = 4$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.
VI $n/2 = 4$, $4 = x_1 + x_4$.
VII Graful este *aproape 2-neconex echilibrat*.

Observația 4. Algoritmul anterior poate fi completat astfel încât să determine și un șir de noi muchii ce trebuie adăugate pentru a obține G_{new} din definiția grafului *aproape 2-neconex echilibrat*. Mai precis, trebuie memorat pentru fiecare componentă conexă și câte un nod $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Dacă $n/2 = x_{w[1]} + x_{w[2]} + \ldots + x_{w[p]}$, atunci muchiile necesare pentru a obține graful G_{new} sunt $[y_{w[1]}, y_{w[2]}], [y_{w[2]}, y_{w[3]}], \ldots, [y_{[w_{p-1}]}, y_{w_{[p]}}]$ - pentru o componentă conexă, respectiv, dacă au rămas componentele conexe cu numerele de noduri $x_{[w_{p+1}]}, x_{[w_{p+2}]}, \ldots, x_{[w_k]}$, se adaugă și muchiile $[y_{[w_{p+1}]}, y_{[w_{p+2}]}], \ldots, [y_{[w_{k-1}]}, y_{[w_k]}]$ - pentru cealaltă componentă conexă.

Bibliografie

[1] *Arhiva educațională .campion*, `http://campion.edu.ro/arhiva/`

[2] *Arhiva educațională infoarena*, `https://www.infoarena.ro/`

[3] *Site de pregătire pentru programare varena*, `http://varena.ro/`

[4] D. Lica, M. Pașoi, *Fundamentele programării*, Ed. L&S InfoMat, clasa a XI-a, 2018.

[5] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2001.

[6] C. Bălcău, *Combinatorică și teoria grafurilor*, Ed. Universității din Pitești, 2007.

[7] C. Bălcău, *Algoritmica grafurilor - Note de curs*, 2019.

Complexitatea algoritmilor de sortare

Costel Bălcău [1]

În acest articol vom analiza complexitatea algoritmilor de sortare bazați pe comparații de chei. Pentru aceasta vom utiliza rezultate de bază din teoria algoritmilor privind ordinele de complexitate și arborii binari stricți, prezentate în [2], dar și două rezultate clasice din analiza matematică - *Teorema lui Lagrange* și *Criteriul cleștelui.*

Rezultatele ce vor fi obținute sunt esențiale în studiul eficienței și optimalității metodelor uzuale de sortare (prin selecție, interschimbare, numărare, inserție, interclasare, Quicksort, etc.).

Problema sortării este următoarea: pentru un vector $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dat, $n \geq 1$, să se ordoneze crescător (sau descrescător) elementele acestui vector.

Observația 1. Pentru evaluarea complexității algoritmilor care rezolvă problema sortării, vom analiza numai comparațiile în care intervin elemente ale vectorului A, numite *comparații de chei.* De asemenea, considerăm că aceste comparații se efectuează succesiv (comparațiile simultane pot fi separate).

Observația 2. Fie $\mathcal{A}$ un algoritm de sortare, bazat pe comparații de chei, a unui vector $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 1$. Presupunem că algoritmul nu conține instrucțiuni redundante și este aplicabil pentru orice poziționare posibilă a componentelor vectorului A, adică pentru orice permutare a acestora.

Atunci algoritmului $\mathcal{A}$ i se poate asocia un arbore binar $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ în care fiecare nod are o etichetă de forma $i?j$, construit recursiv astfel: dacă prima comparație efectuată de algoritm este între elementele a_i și a_j ale vectorului, atunci

- rădăcina arborelui este etichetată cu $i?j$;

- subarborele stâng corespunde continuării algoritmului în cazul $a_i \leq a_j$, dacă acest caz este posibil după prima comparație (altfel este vid, adică nu există descendent stâng);

- subarborele drept corespunde continuării algoritmului în cazul $a_i > a_j$, dacă acest caz este posibil după prima comparație (altfel este vid, adică nu există descendent drept).

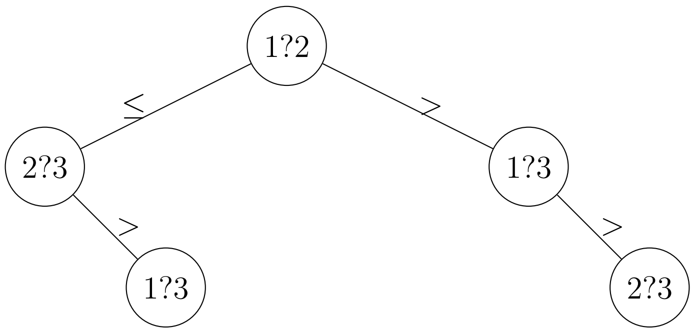
Definiția 1. *Arbore binar $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ construit în observația anterioară se numește* ***arborele de sortare*** *sau* ***arborele de decizie al algoritmului de sortare*** *$\mathcal{A}$.*

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com

Exemplul 3. Considerăm **algoritmul de sortare prin inserție directă**:

SORTINSDIR(A, n) **:**
for $i = \overline{2, n}$ **do**
  $x \leftarrow A[i]$;
  $j \leftarrow i - 1$;
  while $x < A[j]$ *and* $j \geq 1$ **do**
    $A[j+1] \leftarrow A[j]$;
    $j \leftarrow j - 1$;
  $A[j+1] \leftarrow x$;

Arborele de sortare asociat algoritmului pentru $n = 3$ este reprezentat în figura următoare.



Observăm că algoritmul nu conține instrucțiuni redundante.

Definiția 2. *Fie $\mathcal{A}$ un algoritm de sortare, bazat pe comparații de chei, a unui vector $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 1$, și fie $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ arborele de sortare corespunzător. Extindem arborele binar $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ la un arbore binar strict $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ astfel: orice nod al lui $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, având eticheta $i?j$, este reprezentat într-un cerc și devine nod intern în $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ prin aplicarea următoarelor două reguli:*

- *dacă nodul nu are descendent stâng i se adaugă un descendent stâng, reprezentat într-un dreptunghi, corespunzător cazului $a_i \leq a_j$, și etichetat cu permutarea σ a mulțimii de indici $\{1, 2, \ldots, n\}$ pentru care lanțul de la rădăcină la nodul adăugat corespunde ordinii*

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq a_{\sigma(n)};$$

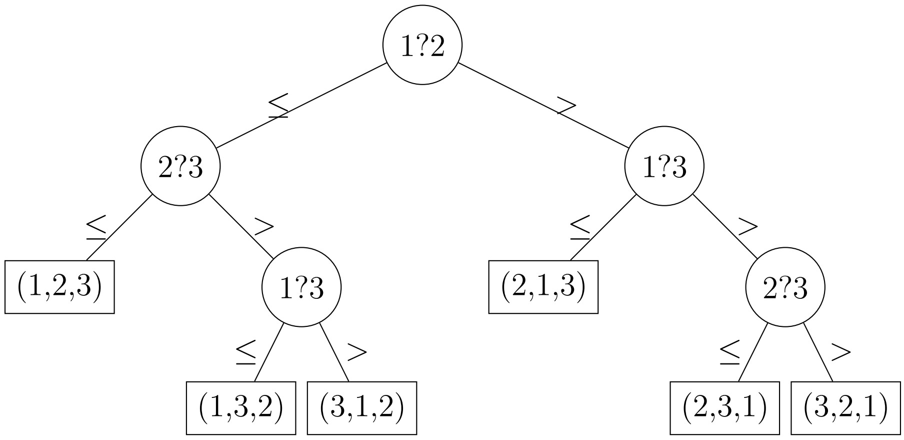
- *dacă nodul nu are descendent drept i se adaugă un descendent drept, reprezentat într-un dreptunghi, corespunzător cazului $a_i > a_j$, și etichetat cu permutarea σ a mulțimii de indici $\{1, 2, \ldots, n\}$ pentru care lanțul de la rădăcină la nodul adăugat corespunde ordinii*

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq a_{\sigma(n)}.$$

*Arborele $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ se numește **arbore extins de sortare**.*

Observația 3. Deoarece algoritmul $\mathcal{A}$ este aplicabil pentru orice permutare a vectorului $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și nu conține instrucțiuni redundante, rezultă că în arborele extins de sortare $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ fiecare permutare σ a mulțimii de indici $\{1, 2, \ldots, n\}$ apare exact o dată ca etichetă a unui nod extern, deci acest arbore are $n!$ noduri externe. Cum, conform Propoziției 2 din [2], orice arbore binar strict cu p noduri interne are $p+1$ noduri externe, rezultă că arborele $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ are $n! - 1$ noduri interne.

Exemplul 4. Arborele extins de sortare asociat algoritmului de sortare prin inserție directă pentru $n = 3$ este reprezentat în figura următoare.



Propoziția 1. *Pentru orice algoritm de sortare $\mathcal{A}$, bazat pe comparații de chei, a unui vector cu n componente avem:*

1) numărul de comparații de chei efectuate în cazul cel mai defavorabil, notat cu $N_{def}(n)$, verifică inegalitatea

$$N_{def}(n) \geq \lceil \log_2 n! \rceil$$

($\lceil x \rceil$ reprezintă aproximarea întreagă prin adaos a numărului real x, numită și partea întreagă superioară a lui x);

2) numărul mediu de comparații de chei efectuate, notat cu $N_{med}(n)$, verifică inegalitatea

$$N_{med}(n) \geq \lceil \log_2 n! \rceil + 1 - \frac{2^{\lceil \log_2 n! \rceil}}{n!}.$$

Demonstrație. Cazul 1) Analizăm cazul cel mai defavorabil.

Evident, numărul de comparații de chei efectuate în cazul cel mai defavorabil este egal cu înălțimea h a arborelui extins de sortare asociat $\overline{\mathcal{T}} = \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$.

Arborele $\overline{\mathcal{T}}$ este un arbore binar strict, cu $n! - 1$ noduri interne (și $n!$ noduri externe). Dar, conform Propoziției 4 din [2], orice arbore binar strict T cu p noduri interne și înălțimea $h(T)$ verifică $h(T) \geq \lceil \log_2(p+1) \rceil$. Rezultă că $h \geq \lceil \log_2 n! \rceil$.

Cazul 2) Analizăm acum cazul mediu (cazul timpului mediu de execuție).

Pentru fiecare din cele $n!$ permutări σ ale mulțimii de indici $\{1, 2, \ldots, n\}$, numărul de comparații de chei efectuate de algoritmul $\mathcal{A}$ în cazul ordinii $a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq a_{\sigma(n)}$ este egal cu distanța de la rădăcina arborelui extins de sortare asociat la nodul extern etichetat cu σ. Deci numărul mediu de comparații de chei are valoarea

$$N_{med}(n) = \frac{\sum\limits_{k \in E} D(k)}{n!},$$

unde E este mulțimea nodurilor externe, iar, pentru fiecare nod k, $D(k)$ reprezintă distanța de la rădăcina arborelui la nodul k. Dar, conform Propoziției 6 din [2], pentru orice arbore binar strict T cu p noduri interne avem

$$\sum_{v\in E(T)} D_T(v) \geq (p+1)\left\lceil \log_2(p+1)\right\rceil + p + 1 - 2^{\lceil \log_2(p+1)\rceil}. \tag{1}$$

Rezultă că $N_{med}(n) \geq \dfrac{n!\left\lceil \log_2 n!\right\rceil + n! - 2^{\lceil \log_2 n!\rceil}}{n!} = \left\lceil \log_2 n!\right\rceil + 1 - \dfrac{2^{\lceil \log_2 n!\rceil}}{n!}$. □

Corolarul 1. *Fie $\mathcal{A}$ un algoritm de sortare, bazat pe comparații de chei, a unui vector cu n componente și fie $\overline{\mathcal{T}} = \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ arborele extins de sortare asociat.*

1) Algoritmul $\mathcal{A}$ este optim în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil dacă arborele $\overline{\mathcal{T}}$ are toate nodurile externe situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel. Mai mult, în acest caz numărul de comparații de chei efectuate în cazul cel mai defavorabil, notat cu $N_{def}(n)$, verifică egalitatea

$$N_{def}(n) = \left\lceil \log_2 n!\right\rceil.$$

2) Algoritmul $\mathcal{A}$ este optim în raport cu timpul mediu de execuție dacă și numai dacă arborele $\overline{\mathcal{T}}$ are toate nodurile externe situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel. Mai mult, în acest caz numărul mediu de comparații de chei efectuate, notat cu $N_{med}(n)$, verifică egalitatea

$$N_{med}(n) = \left\lceil \log_2 n!\right\rceil + 1 - \frac{2^{\lceil \log_2 n!\rceil}}{n!}.$$

Demonstrație. Optimalitatea în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil este o consecință directă a Cazului 1 din propoziția anterioară și a Propoziției 5 din [2], conform căreia orice arbore binar strict T cu p noduri interne și cu toate nodurile externe situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel are înălțimea $h(T) = \left\lceil \log_2(p+1)\right\rceil$.

Optimalitatea în raport cu timpul mediu de execuție este o consecință directă a Cazului 2 din propoziția anterioară și a Propoziției 6 din [2], conform căreia inegalitatea (1) devine egalitate dacă și numai dacă arborele T are toate nodurile externe situate pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel. □

Exemplul 5. Un algoritm de sortare, bazat pe comparații de chei, a unui vector cu $n = 3$ componente este optim în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil dacă și numai dacă în acest caz numărul de comparații de chei efectuate este $\left\lceil \log_2 3!\right\rceil = 3$, adică dacă și numai dacă arborele extins de sortare asociat are 4 nivele.

Pe de altă parte, un algoritm de sortare, bazat pe comparații de chei, a unui vector cu $n = 3$ componente este optim în raport cu timpul mediu de execuție dacă și numai dacă arborele extins de sortare asociat are 4 nivele și toate nodurile externe situate pe ultimele două nivele. Mai mult, în acest caz numărul mediu de comparații de chei efectuate este $\left\lceil \log_2 3!\right\rceil + 1 - \dfrac{2^{\lceil \log_2 3!\rceil}}{3!} = \dfrac{16}{6} = 2{,}(6)$.

Analog, un algoritm de sortare, bazat pe comparații de chei, a unui vector cu $n = 4$ componente este optim în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil dacă și numai dacă în acest caz numărul de comparații de chei efectuate este $\left\lceil \log_2 4!\right\rceil = 5$, adică dacă și numai dacă arborele extins de sortare asociat are 6 nivele.

Pe de altă parte, un algoritm de sortare, bazat pe comparații de chei, a unui vector cu $n = 4$ componente este optim în raport cu timpul mediu de execuție dacă și numai dacă arborele extins de sortare asociat are 6 nivele și toate nodurile externe situate pe ultimele două nivele. Mai mult, în acest caz numărul mediu de comparații de chei efectuate este $\lceil \log_2 4! \rceil + 1 - \dfrac{2^{\lceil \log_2 4! \rceil}}{4!} = \dfrac{112}{24} = 4{,}(6)$.

Lema 1. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile:*

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}; \tag{2}$$

$$n \log_2 n - (n-1)\log_2 e \leq \log_2 n! \leq n \log_2 n. \tag{3}$$

Demonstrație. Aplicând *Teorema lui Lagrange* pentru funcția $f : [n, n+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ (f este derivabilă), rezultă că există $c \in (n, n+1)$ a.î. $f(n+1) - f(n) = f'(c)$, adică $\ln(n+1) - \ln n = \dfrac{1}{c}$. Dar $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{n}$, deci obținem relația (2).

Din această relație rezultă că $(n+1)\ln(n+1) - n \ln n < 1 + \ln(n+1)$, deci

$$\begin{aligned}
2\ln 2 - \ln 1 &< 1 + \ln 2,\\
3\ln 3 - 2\ln 2 &< 1 + \ln 3,\\
&\ldots\\
n \ln n - (n-1)\ln(n-1) &< 1 + \ln n.
\end{aligned}$$

Prin adunare obținem că

$$n \ln n < n - 1 + \ln n!, \ \forall n \geq 2,$$

de unde, utilizând formula $\log_2 x = \log_2 e \cdot \ln x$, $\forall x > 0$, rezultă prima inegalitate din (3), valabilă și pentru $n = 1$. A doua inegalitate din (3) este o consecință a inegalității evidente $n! \leq n^n$. □

Lema 2. *Funcțiile $\log_2 n!$ și $n \log_2 n$ sunt asimptotic echivalente, adică*

$$\log_2 n! \sim n \log_2 n.$$

Demonstrație. Din (3) rezultă că

$$1 - \frac{(n-1)\log_2 e}{n \log_2 n} \leq \frac{\log_2 n!}{n \log_2 n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

deci aplicând *Criteriul cleștelui* avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2 n!}{n \log_2 n} = 1$, adică $\log_2 n! \sim n \log_2 n$. □

Lema 3. *Avem* $\lceil \log_2 n! \rceil + 1 - \dfrac{2^{\lceil \log_2 n! \rceil}}{n!} \sim n \log_2 n$.

Demonstrație. Cum $\log_2 n! \leq \lceil \log_2 n! \rceil < 1 + \log_2 n!$, rezultă că $n! \leq 2^{\lceil \log_2 n! \rceil} < 2 \cdot n!$, adică $n! \leq 2^{\lceil \log_2 n! \rceil} \leq 2 \cdot n! - 1$, deci

$$\log_2 n! - 1 + \frac{1}{n!} \leq \lceil \log_2 n! \rceil + 1 - \frac{2^{\lceil \log_2 n! \rceil}}{n!} < \log_2 n! + 1.$$

Aplicând *Criteriul cleștelui* obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lceil \log_2 n! \rceil + 1 - \dfrac{2^{\lceil \log_2 n! \rceil}}{n!}}{\log_2 n!} = 1$, deci folosind lema anterioară rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lceil \log_2 n! \rceil + 1 - \dfrac{2^{\lceil \log_2 n! \rceil}}{n!}}{n \log_2 n} = 1$, adică echivalența asimptotică din enunț. □

Următorul rezultat este o consecință imediată a Corolarului 1, Lemelor 2 și 3 și Corolarului 1 din [2] (conform căruia dacă $f(n) \sim g(n)$, atunci $f(n) = \Theta(g(n))$).

Teorema 1 (complexitatea algoritmilor de sortare). *Numărul de comparații de chei efectuate de un algoritm optim de sortare a unui vector cu n componente este asimptotic echivalent cu*

$$n \log_2 n,$$

atât în cazul cel mai defavorabil, cât și în cazul mediu (cazul timpului mediu de execuție), deci în ambele cazuri un astfel de algoritm are complexitatea

$$\Theta(n \log_2 n).$$

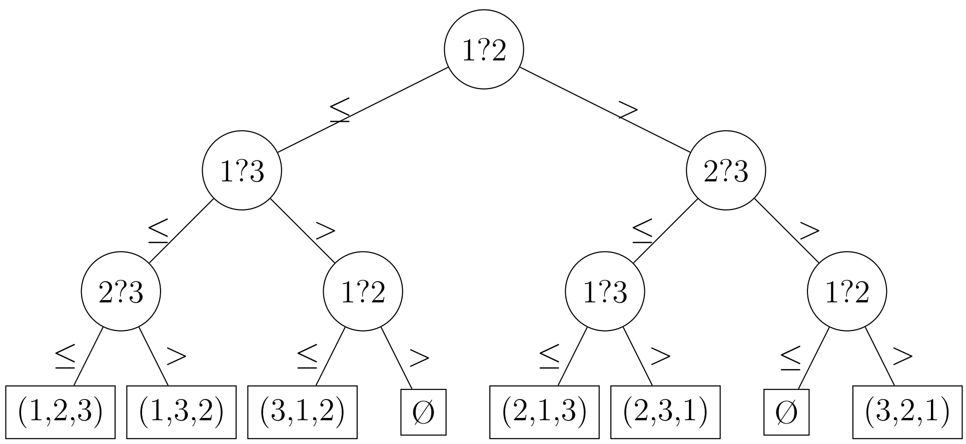
Observația 4. Dacă un algoritm de sortare are instrucțiuni redundante, atunci în arborele extins de sortare asociat orice nod extern care nu corespunde unei ordini $a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq a_{\sigma(n)}$ (calea de la rădăcină la el fiind imposibilă la executarea algoritmului) este etichetat cu $\emptyset$.

În acest caz arborele extins de sortare va conține mai mult de $n!$ noduri externe (iar arborele de sortare va conține mai mult de $n! - 1$ noduri), deci un astfel de algoritm nu poate fi optim în raport cu timpul mediu de execuție.

Exemplul 6. Considerăm **algoritmul de sortare prin selecție**:

SORTSEL(A, n) **:**
for $i = \overline{1, n-1}$ **do**
    $m \leftarrow i$; // $a_m = \min\{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$
    for $j = \overline{i+1, n}$ **do**
        if $A[j] < A[m]$ **then**
            $m \leftarrow j$;
    $A[i] \leftrightarrow A[m]$; // `interschimbare`

Arborele extins de sortare asociat algoritmului pentru $n = 3$ este reprezentat în figura următoare.



Observăm că algoritmul conține instrucțiuni redundante, și anume comparația între elementele a_1 și a_2 se efectuează inutil de două ori pe penultimul nivel.

Observația 5. În anumite cazuri particulare pot exista algoritmi de sortare a unui vector cu n componente, nebazați pe comparații de chei, a căror complexitate să fie mai bună decât $\Theta(n \log_2 n)$.

De exemplu, dacă vectorul $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 1$, are toate componentele numere naturale nenule mai mici sau egale cu m, $m \in \mathbb{N}^*$, adică

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

un algoritm eficient de sortare a vectorului A este **sortarea prin numărarea frecvențelor componentelor**:

- pentru fiecare valoare k, $k = \overline{1, m}$, numărăm câte elemente ale vectorului A sunt egale cu k, adică determinăm numărul

  $$f_k = \operatorname{card}\{i \mid i = \overline{1, n},\ a_i = k\},$$

  numit *frecvența absolută* de apariție a valorii k în vectorul A;

- vectorul sortat crescător este

  $$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{de } f_1 \text{ ori}}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{\text{de } f_2 \text{ ori}}, \ldots, \underbrace{m, m, \ldots, m}_{\text{de } f_m \text{ ori}}).$$

  Evident, $f_1 + f_2 + \ldots + f_m = n$.

Descrierea în pseudocod a algoritmului are următoarea formă.

SORTNUMFRECV(A, n, B)**:** `// vectorul` $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ `va` `// conține elementele vectorului` $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ `// sortate crescător`

for $k = \overline{1, m}$ **do**
  $F[k] \leftarrow 0;$ `//` $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ `este vectorul frecvențelor`
for $i = \overline{1, n}$ **do**
  $F[A[i]] \leftarrow F[A[i]] + 1;$
$i \leftarrow 0;$
for $k = \overline{1, m}$ **do**
  for $j = \overline{1, F[k]}$ **do**
    $i \leftarrow i + 1;$
    $B[i] \leftarrow k;$

Algoritmul SORTNUMFRECV efectuează m atribuiri de forma $F[k] \leftarrow 0$, n atribuiri de forma $F[A[i]] \leftarrow F[A[i]] + 1$ și tot n atribuiri de forma $B[i] \leftarrow k$ (iar celelalte operații nu depășesc ordinul de creștere al acestora), deci are complexitatea

$$\Theta(n + m).$$

Astfel, dacă $m = n$ sau, mai general, $p \cdot n \leq m \leq q \cdot n$ cu p și q numere reale pozitive fixate (independente de n), atunci algoritmul SORTNUMFRECV are complexitatea $\Theta(n)$, adică este un algoritm de sortare liniar!

Bibliografie

[1] Gh. Barbu, I. Văduva, M. Boloșteanu, *Bazele informaticii*, Editura Tehnică, București, 1997.

[2] C. Bălcău, *Optimalitatea algoritmului de căutare binară*, MATINF 1 (2018), nr. 1, 39–51.

[3] A. Carabineanu, *Structuri de date*, `http://ebooks.unibuc.ro/informatica/carabineanu/CARA_STR.pdf`.

[4] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, 2009.

[5] H. Georgescu, *Tehnici de programare*, Editura Universității din București, București, 2005.

[6] D.E. Knuth, *The Art Of Computer Programming. Vol. 4A: Combinatorial Algorithms*, Addison-Wesley, Massachusetts, 2011.

[7] R. Sedgewick, P. Flajolet, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, New Jersey, 2013.

RUBRICA DE ROBOTICĂ

Repetarea operațiilor unui robot LEGO Mindstorms Education EV3

Doru Anastasiu Popescu [1]

Introducere

În mediul de programare *Mindstorms EV3* grupul *Flow Control* (Figura 1) conține blocul *Loop*, care ne permite să repetăm unul sau mai multe blocuri.

Fig. 1: Grupul *Flow Control*

Condiția de oprire a execuției blocurilor din corpul blocului *Loop* poate conține informații de la senzori sau expresii logice. Blocul *Loop* se termină (Figura 2) conform cu modul de configurare *True*, respectiv *False* în zona de setare.

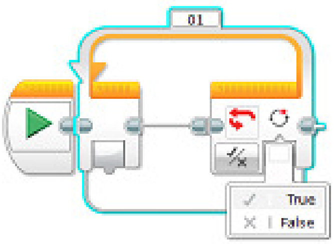


Fig. 2: Blocul *Loop*

Problemă rezolvată

Pentru a pune în evidență modul de repetare a operațiilor pe care le poate face un robot *LEGO Mindstorms EV3* prezentăm următoarea aplicație.

Aplicația 1. *Trebuie sa realizăm un proiect pentru un concurs, care prin intermediul robotului să numere câte discuri de culori diferite de alb (culoarea planșei) se găsesc pe o linie dreaptă de lungime L cm. L este un număr natural de două cifre generat aleator. În regulamentul concursului este precizat faptul că robotul poate poarcurge distanța o singură dată.*

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

Soluție: Vom scrie partea cea mai complicată a proiectului, după care vom trece la copierea unei porțiuni din program și lipirea ei de mai multe ori, ca să acopere toată distanța cea mai lungă (99 cm) ce poate să apară. În program se folosesc următoarele variabile: *L* pentru lungimea traseului (generată aleator, ca să verifice programul în mai multe situații), *rot* pentru numărul de rotații corespunzătoare distanței *L*, *k* numărul de rotații până la un moment dat, *Nr* numărul de buline de culoare diferită de alb întâlnite pe traseu. La o rotație se parcurg aproximativ 18 cm (valoare memorată într-o constantă) dacă se folosesc roți de diametrul 5,5 cm. În program se vor introduce și două blocuri *Switch*, primul pentru a verifica folosind senzorul de culoare dacă se întâlnește o bulină colorată, iar al doilea pentru a verifica dacă numărul de rotații până la un moment dat, nu depășește valoarea lui *rot*.

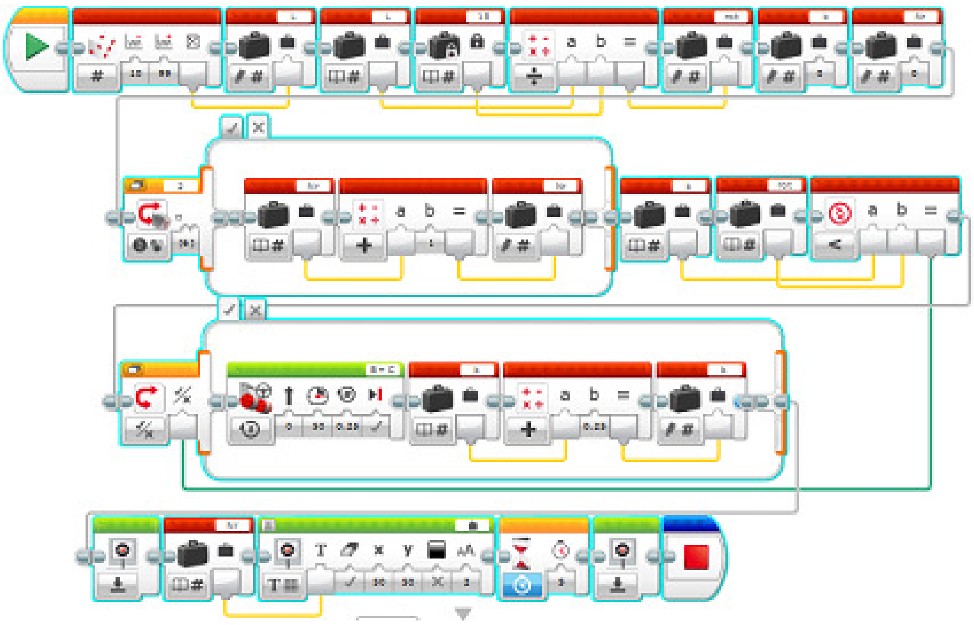


Fig. 3: Programul de numărare a discurilor fără bloc de repetare

Pentru că trebuie să parcurgem cel mult 99 cm, atunci blocurile ar trebui repetate de 99/0.25 ori. Se poate micșora acest număr dacă se înlocuiește în blocul *Move Steering* valoarea 0.25 cu o valoare mai mare, dar există riscul să nu mai numere toate bulinele. Acest lucru poate fi evitat folosind blocul *Loop* (care are ca efect repetarea execuției șirului de blocuri din interiorul său până când o anumită expresie logică este adevărată).

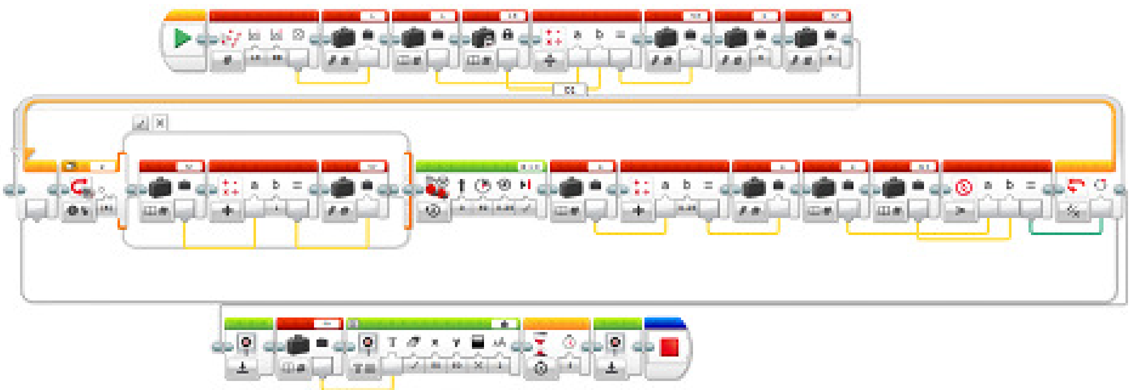


Fig. 4: Programul de numărare a discurilor cu bloc de repetare (*Loop*)

□

Probleme propuse

Pentru fiecare din problemele următoare scrieți câte un proiect folosind mediul interactiv de programare *Mindstorms EV3*.

1. Se dă un traseu în formă dreptunghiulară (Figura 5) cu laturile de lungime a și b (unitatea de măsură este centimetrul, $1 \leq a, b \leq 60$). Deplasați robotul pe acest traseu pornind dintr-un colț și avertizați sonor când numărul de rotații este par. Se va folosi sunetul unei culori (exemplu: *red* – roșu).

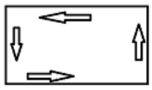


Fig. 5: Traseu dreptunghiular cu sensul de deplasare precizat

2. Pe o planșă se află un cub și la o distanță de cel mult 50 cm de acesta un robot. Deplasați robotul până la cel puțin 7 cm de cub și afișați pe ecran distanța parcursă. Afișarea se va păstra pe o perioadă de 5 secunde.
3. Simulați modul de parcare a unei mașini folosind un robot. Proiectați o parcare cu trei locuri pe partea dreaptă (Figura 6). Plasați aleator în două din locuri cuburi ce reprezintă mașini staționate de culori verde și galben și deplasați robotul astfel încât să se așeze în locul liber, fără să atingă cuburile.

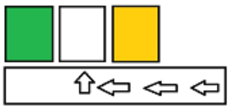


Fig. 6: Parcare cu specificarea locului liber

Bibliografie

[1] D.A. Popescu, *Programarea roboților LEGO folosind mediul Mindstorms EV3*, MATINF, nr. 1, 2018.

[2] D.A. Popescu, *Programarea roboților LEGO folosind structura alternativă în mediul grafic interactiv Mindstorms Education EV3*, MATINF, nr. 2, 2018.

[3] D.A. Popescu, S. Profeanu, S. Dobrescu, *Manual de informatică pentru clasa a V-a*, Editura CD-Press, 2017.

[4] *Minsdtorms EV3 - Ghid de Utilizare*, LEGO Group, 2013.

[5] L. Negrescu, L. Negrescu, *Construirea și programarea roboților LEGO Mindstorms EV3*, Editura Albastră, 2015.

[6] J. Olayvar, E. Lindberg, *LEGO Mindstorms EV3 Programming Basics*, Washington State Library, 2016.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Costel Anghel [1] și *Florea Badea* [2]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $5 \cdot 9^{-1} \cdot 9 : 2$ este egal cu ....
2. Numărul de numere de forma $\overline{ab7}$ divizibile cu 4 este egal cu ....
3. Un triunghi echilateral are înălțimea egală cu $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ dm. Perimetrul său este egal cu ... mm.
4. Alegând un număr din mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{a8b}\}$, probabilitatea ca numărul ales să fie divizibil cu 3 este ....
5. Suplementul suplementului unui unghi cu măsura de $57°12'14''$ are măsura ....
6. Un cub are aria unei fețe egală cu 1024 cm^2. Volumul cubului este egal cu ... dm^3.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se dă numărul real $a = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.
   a) Scrieți a ca sumă de două numere iraționale.
   b) Aproximați prin lipsă numărul a cu o eroare mai mică decât 10^{-1}.
   c) Aflați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n < a < n + 1$.
2. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x^2-1}{4x^2-1} - \frac{x-2}{2x-1} + \frac{x-3}{2x+1}\right) : \frac{x^2-x-2}{4x^2+2x-2}$.
   a) Determinați valoarea lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $E(x)$ nu are sens.
   b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.
   c) Aflați $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $E(n) \in \mathbb{Z}$.
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a + 2)x + 1$.
   a) Determinați $f(x)$ știind că $A(-1; 2) \in G_f$.
   b) Pentru $a = -3$ reprezentați grafic funcția f.
   c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $f(3 - a) > 0$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Un trapez dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$ are lungimile laturilor $AD = 30$ m, $DC = x + 1$ m, $CB = x$ m, $AB = 2x - 5$ m, $x \in \mathbb{R}_+$.
   a) Determinați valoarea lui x.
   b) Aflați aria trapezului $ABCD$.
   c) Aflați lungimea segmentului determinat de diagonale pe linia mijlocie a trapezului.
2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 6$ cm și diagonala unei fețe laterale de 10 cm. Se cer:
   a) Determinați aria laterală, aria totală și volumul prismei.
   b) Determinați distanța de la punctul C' la latura AB.
   c) Calculați valoarea sinusului unghiului diedru dintre planele $(C'AB)$ și (ABC).

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Ion Minulescu", Slatina, anghelcostel2012@yahoo.com
[2] Profesor, Școala Gimnazială ,,Nicolae Coculescu", Scornicești

Testul 2

Roxana-Maria Manea [3]

SUBIECTUL I

1. Jumătatea numărului 2^{72} este numărul ... .
2. Cel mai mic număr întreg multiplu de 3 din intervalul $(-3, 6]$ este ... .
3. Dacă $a - b = 7$, atunci rezultatul calculului $3(b - a)$ este egal cu ... .
4. Aria unui hexagon regulat înscris într-un cerc de rază 4 cm este egală cu ... cm^2.
5. Într-un vas sub formă de cub cu muchia de 5 dm se află 120 litri de apă. Înălțimea la care se ridică apa în vas este de ... dm.
6. Elevii clasei a VI-a ai unei școli gimnaziale au participat la un concurs de cultură generală. Aceștia au fost organizați în grupe de câte 4 elevi, astfel:

Grupa	I	II	III	IV	V	VI	VII
Punctaj	40	25	65	88	50	100	80

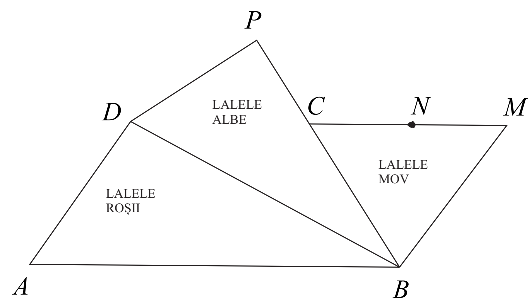
Știind că toți elevii au participat la concurs, conform datelor din tabel, numărul de puncte obținute în medie de un elev a fost de ... puncte.

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$ și înălțimea VO.
2. Se consideră numărul natural $A = 303303330\ldots\underbrace{333\ldots3}_{\text{de 2011 ori}}$.
   a) Determinați suma tuturor cifrelor numărului natural A.
   b) Dacă S reprezintă suma cifrelor numărului natural A, atunci arătați că $\frac{S}{3} - 1005 \cdot 1006$ este pătrat perfect.
3. Se consideră funcțiile liniare $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = x - 2$ și $g(y) = 2y - 7$.
   a) Calculați $g(5) + f(3) - g(f(4))$.
   b) Arătați că numărul $F = \frac{n^2-25}{g(n)-f(n)}$ este natural, pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{5\}$.
4. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x-2} + \frac{x}{2x-4}\right) : \left(\frac{x^2+4x-12}{3x}\right)^{-1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 0, 2\}$. Arătați că $E(x) - 2 = \frac{x}{6} + \frac{6}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 0, 2\}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Figura alăturată reprezintă schița unei grădini formată inițial din trapezul $ABCD$ și triunghiul echilateral BMC, cu $AD = DC = BC$. Proprietarul grădinii dorește să planteze trei soiuri de lalele (albe, roșii, mov), iar pentru aceasta este nevoit să își extindă suprafața grădinii construind un gard din punctul D la BC optând ca lungimea acestuia să fie minimă.

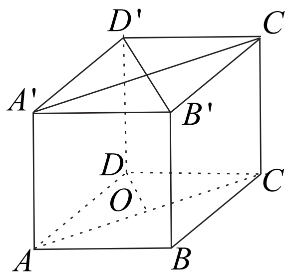


   a) Dacă N este mijlocul laturii (MC), arătați că patrulaterul $DBNP$ este trapez isoscel.

[3] Profesor, Școala Gimnazială ,,Nicolae Crevedia", roxam86@yahoo.com

b) Știind că $AB = 12$ m, aflați lungimea minimă a gardului necesar pentru extinderea grădinii.
c) Arătați că suprafața plantată cu lalele albe este egală cu media aritmetică a celorlalte două suprafețe plantate cu lalele roșii și mov.

2. Figura alăturată reprezintă un bazin având forma cubului $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 2 cm.



a) Aflați aria patrulaterului $ACC'A'$.
b) Determinați tangenta unghiului format de planele $(A'BD)$ și $(OB'D')$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.
c) Proprietarul dorește să umple bazinul cu apă având la dispoziție două robinete cu debitul de 960 litri/oră, respectiv 640 litri/oră. În cât timp se umple bazinul cu apă, știind că după ce apa a ajuns la jumătatea acestuia robinetul cu debitul cel mai mic s-a oprit?

Testul 3

Mihaela Simona Georgescu [4]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $3^{-1^{2018}} - (\sqrt{(-3)^2})^{-2}$ este egal cu ... .
2. Cel mai mare număr întreg al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} : -4 \le x + 2 < 6\}$ este ... .
3. Într-o urnă sunt 7 bile negre, 8 bile roșii și 14 bile verzi. Probabilitatea de a extrage o bilă care nu este verde este ... .
4. Aria unui triunghi echilateral cu înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm este egală cu ... cm^2.
5. Un tetraedru regulat $ABCD$ are muchia bazei $AB = 4$ cm. Aria totală este ... cm^2.
6. Andrei rezolvă timp de o săptămână probleme la matematică după cum urmează:

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Nr.pr.	7	8	16	4	10	5	7

Numărul mediu de probleme rezolvate într-o zi este ....

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați pe foaia de examen o prismă triunghiulară regulată dreaptă $CREION$.
2. Determinați numerele $a, b \in \mathbb{N}^\star$ pentru care au loc relațiile: $(a, b) = 18$ și $a + b = 198$.
3. Efectuați:

$$\frac{60}{6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} - \left(\frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{14}{|\sqrt{8} - \sqrt{12}|} + \sqrt{196} - 2\sqrt{21 - 6\sqrt{6}}.$$

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția f.
b) Calculați sinusul unghiului determinat de graficul funcției și axa absciselor.

[4] Profesor, Școala Gimnazială Galeșu, nastase.simona6@gmail.com

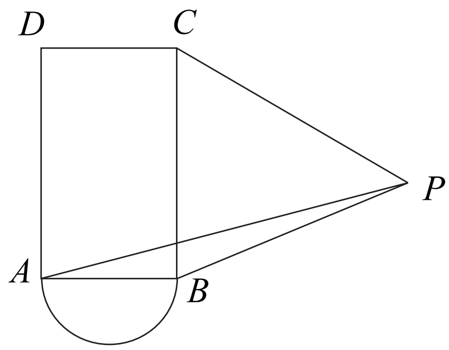
5. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left[\frac{x}{x+5} - \frac{5}{5-x} - \frac{x^2}{(x-5)(x+5)}\right] : \left(\frac{x^2+x-20}{5x-20}\right)^{-1},$$

unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5, 4\}$. Arătați că $E(x) = \frac{5}{x-5}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. În figura alăturată este reprezentată o zonă de agrement formată dintr-un dreptunghi $ABCD$ care reprezintă o piscină, un triunghi echilateral BPC care reprezintă o zonă de plajă și un semicerc cu diametrul AB care este plantat gazon. Știind că $CP = 6\sqrt{3}$ m și $AB = 6$ m, calculați:



   a) Aria zonei de agrement.
   b) Demonstrați că $AC \perp CP$.
   c) Calculați lungimea segmentului AP.

2. Se consideră o piramidă patrulateră regulată dreaptă $ABCDE$ cu perimetrul bazei $48\sqrt{2}$cm și înălțimea $AO = 12$cm.

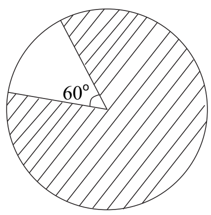
   a) Calculați aria pătratului $BCDE$.
   b) Calculați aria laterală a piramidei $ABCDE$.
   c) Determinați sinusul unghiului format de planele (ABD) și (ACD).

Testul 4

Elena Vasile [5]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $\sqrt{48} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ este egal cu ... .
2. Media geometrică a numerelor $a = \sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$ și $b = |\sqrt{11}+3|$ este egală cu ... .
3. Complementul unghiului cu măsura de $31°23'43''$ este egal cu ... .
4. Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 36 cm. Înălțimea triunghiului echilateral este egală cu ... .
5. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ în care $VA = 5$ cm și înălțimea $VO = 3$ cm. Perimetrul bazei este egală cu ... .
6. În diagrama de mai jos porțiunea nehașurată reprezintă ...% din partea hașurată.



SUBIECTUL al II-lea

1. Să se deseneze cubul ”EVALUARE”.

[5] Profesor, Școala Gimnazială ,,George Poboran”, Slatina, iristefivasile@yahoo.com

2. După prima zi în care a parcurs $\frac{2}{3}$ din traseu un turist constată că mai are de parcurs 60 km. Care este lungimea traseului?
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$.
   a) Să se arate că $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.
   b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(0,2a)$ să fie situat pe graficul funcției.
4. Se consideră expresia

$$E(x)=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right):\frac{9}{3x-6},$$

   unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$.
   a) Arătați că $E(x)=\frac{1}{x+2}$.
   b) Rezolvați inecuația $2E(a)-1\le 0,\ a\ne\pm 2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Pe un teren dreptunghiular $ABCD$ cu $AB=80$ cm, $BC=40$ cm se amenajează un lac artificial de formă circulară, tangent la trei laturi ale triunghiului astfel încât $AM=MD=AP$, $M\in(AD)$ și $P\in(AB)$.
   a) Calculați suprafața terenului rămasă după amenajarea lacului.
   b) Dacă N este diametral opus lui M, calculați perimetrul $\triangle NBC$.
   c) Pe teren, în afara lacului se pune gazon. Știind că 1 m^2 de gazon costă 6,2 lei, calculați cât costă întregul teren?
2. Pe planul triunghiului echilateral ABC se ridică perpendiculara AM, $AM=6$ cm, iar $MB=10$ cm. Punctele N și P sunt mijloacele laturilor $[AC]$ și $[BC]$.
   a) Determinați perimetrul triunghiului ABC.
   b) Determinați aria triunghiului MAP și calculați distanța de la M la BC.
   c) Arătați că $BC\perp(MAP)$.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marius Macarie [1]

SUBIECTUL I

1. Să se arate că numărul $z = (2+i)^4 + (2-i)^4$ este întreg, unde $i^2 = -1$.
2. Să se determine valorile reale nenule ale lui a știind că $ax^2 + x - 2 \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.
4. Să se determine termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^{20}$ care nu-l conține pe x.
5. Fie punctele $A(1,2)$, $B(-1,3)$ și $C(0,4)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful C al triunghiului ABC.
6. Să se arate că $2\left(\sin\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2k+1 & -1 & 0 \\ 0 & k(k+1) & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Să se calculeze $\det(A_1^2)$.
   b) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A_1 \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   c) Să se calculeze $S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + mX + n$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
   a) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât f este divizibil cu polinomul $g = X^2 - 4X + 3$.
   b) Pentru $m = -4$ și $n = 3$, să se afle rădăcinile polinomului f.
   c) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii lui f la $X - 2$ să fie egal cu 5 și

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_4)(x_1 + x_3 + x_4)(x_2 + x_3 + x_4) = 71.$$

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (-3,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{3+x}{3-x}$.
   a) Să se arate că $f'(x) = \frac{6}{(3+x)(3-x)}$, $x \in (-3,3)$.
   b) Să se determine asimptotele graficului funcției f.
   c) Să se determine intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x\sqrt{x^2+4}$.
   a) Să se verifice că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\ln 2}$.
   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+4} \cdot f(x)\,\mathrm{d}\,x$.
   c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot 2^{-x} \cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu [2]

SUBIECTUL I

1. Ordonați crescător numerele $\sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5}, \log_2 4$.
2. Determinați valorile întregi ale parametrului real m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+mx+4$ să fie deasupra axei Ox.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg(x+1)+\lg(5x)=1$.
4. Determinați numărul numerelor de trei cifre distincte ce se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.
5. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$, dacă $A(2,5)$ și $B(4,7)$.
6. Determinați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $AB=3,\ AC=8$ și $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & -3 \\ -3 & x+2 \end{pmatrix}$ cu $x\in\mathbb{R}$.
   a) Calculați $(A(0))^2$.
   b) Dacă $A(x)=xI_2+B$, să se determine inversa matricei B.
   c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\det A(x)=0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-2(x+y)+6$.
   a) Arătați că $x*y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x, y.
   b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $x*y=8$.
   c) Calculați valoarea expresiei $(-2019)*(-2018)*\cdots*2018*2019$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$.
   a) Calculați $f'(x)$.
   b) Determinați asimptotele funcției.
   c) Arătați că $f(x)\le -\frac{1}{4},\ \forall x\in(-3,1)$.
2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$.
   a) Calculați $\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+4}f(x)\,\mathrm{d}\,x$.
   b) Arătați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $(-1,\infty)$.
   c) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$.

Testul 3

Mihai Florea Dumitrescu [3]

SUBIECTUL I

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ cu $S_{11}=176$. Calculaţi a_4+a_8.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com
[3] Profesor, Liceul ,,Ștefan Diaconescu", Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

2. Determinaţi imaginea funcţiei $f : [3; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
3. Rezolvaţi ecuaţia $8^x - 3(4^x - 2^x) = 1$.
4. Câte numere naturale mai mici decât 100 nu sunt divizibile cu 2 sau cu 3 sau cu 7 ?
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(-3,4)$ și $C(-4,a)$. Aflaţi numărul real a astfel încât triunghiul ABC este dreptunghic în A.
6. Ordonaţi crescător numerele $\sin(-4)$, $\sin 0$ și $\sin 2$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
   a) Arătaţi că $\det(B(a) \cdot A(a)) = 0$, $(\forall)\, a \in \mathbb{R}$.
   b) Arătaţi că matricea $A(a) \cdot B(a)$ este inversablilă pentru orice număr real a.
   c) Aflaţi numărul real a pentru care matricea $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ este inversa matricei $A(a) \cdot B(a)$.
2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = 2xy + 2x + 2y + 1$.
   a) Arătaţi că legea de compoziţie ,,$*$” este asociativă.
   b) Rezolvaţi în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia $2^x * y = 2019$.
   c) Calculaţi $2 * 4 * 6 * ... * 2020$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - \ln x$.
   a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x+1)-2\sqrt{2}}{x}$.
   b) Determinaţi asimptota verticală la graficul funcţiei f.
   c) Arătaţi că $x \le e^{\frac{2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}}$, $(\forall)\, x \in (0, +\infty)$.
2. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
   a) Calculaţi $\int_1^4 e^{\sqrt{x}+1} \cdot f(x)\, \mathrm{d}\, x$.
   b) Calculaţi $\int_1^4 \left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) \cdot f'(x)\, \mathrm{d}\, x$.
   c) Calculaţi aria suprafeţei plane cuprinse între dreptele $x = 1$ și $x = 9$ și graficul funcţiei $g : [1, 9] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Testul 4

Maria-Crina Diaconu [4]

SUBIECTUL I

1. Calculați $|z| + |\bar{z}|$ dacă $z = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$.
2. Rezolvați in $\mathbb{R}$ ecuația: $2\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-1}$.
3. În dezvoltarea binomului $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + a\sqrt{a}\right)^n$ suma coeficienților binomiali este egală cu 64. Determinați rangul termenului ce conține a^5.
4. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare unul din numerele naturale de trei cifre, acesta să fie format doar din cifre pare?

[4] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

5. Scrieți ecuația medianei BM a triunghiului ABC unde $A(1,4), B(3,2), C(4,6)$.
6. Se consideră ecuația $\cos x - \sin x = a\sqrt{3}, a \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea parametrului real a pentru care $x = \frac{3\pi}{4}$ este soluție a ecuației.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și funcția $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R}), f(X) = AX$.
   a) Calculați $f(A)$.
   b) Calculați $(f(I_3))^{-1}$.
   c) Găsiți $X + Y$, dacă $f(X) + f(Y) = I_3$ și $X, Y \in M_3(\mathbb{R})$.
2. Considerăm polinomul $f = -2X^3 + X^2 - 4 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.
   a) Arătați că restul împărțirii polinomului f la $X - 1$ este -5.
   b) Determinați valoarea reală a lui m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m(x_1 + x_2 + x_3)$.
   c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x) = -4$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2-5x+6}$.
   a) Determinați domeniul maxim de definiție D.
   b) Determinați asimptotele la graficul funcției f.
   c) Studiați monotonia funcției f și determinați punctele de extrem.
2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x}$.
   a) Calculați $\int_0^1 e^x f(x)dx$.
   b) Calculați $\int_0^1 xf(-x)dx$.
   c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției g, $g : [1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ și de axa Ox.

Testul 5

Monica Dumitrache [5]

SUBIECTUL I

1. Arătați că $4i - 3 + (2 - i)^2 = 0$, unde $i^2 = -1$.
2. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(m^2 - 4m,\ 2m - 1)$ să se afle în cadranul al doilea.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 (x^2 + 7x - 10) = 3$.
4. Determinați numărul submulțimilor cu cinci elemente ale mulțimii $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
5. Determinați numărul real m, pentru care vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\,\vec{i} + (3m+1)\,\vec{j}$ sunt coliniari.
6. Arătați că $\sin\left(m - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(m + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, pentru orice număr real m.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.
   a) Calculați $\det(M(3))$.

[5] Profesor, Colegiul Economic ,,Ion Ghica”, Târgoviște, dumitrache_monica@yahoo.com

b) Arătați că $M(-1) \cdot M(0) = M(-1)$.
c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(M(x)) = 0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - aX^2 - X + 1$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $f(1) - f(2) - 3a = -6$, pentru orice număr real a.
b) Pentru $a = 2$ calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $x^2 - x - 1$.
c) Determinați numărul real a pentru care are loc egalitatea:

$$x_1 + x_2 + x_3 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2019,$$

unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (-1,\ +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.

a) Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}$, $x \in (-1,\ +\infty)$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.
c) Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f : (0,\ +\infty) \to \mathrm{R}$, $f(x) = \frac{2x^2-2}{x}$.

a) Arătați că $\int\limits_0^1 \left(f(x) + \frac{2}{x}\right) dx = 1$.
b) Demonstrați că funcția $F : (0,\ +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 - 2\ln x + 2019$ este o primitivă a funcției f.
c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este mai mare decât 3π.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

TESTUL 1

Raluca-Mihaela Georgescu [1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Arătați că numărul $\log_5(\sqrt{14}-3)+\log_5(\sqrt{14}+3)-\log_3 81$ este întreg. **(5p)**

2. Determinați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+2$ cu axele de coordonate. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x+1}-26\cdot 5^x+5^2=20$. **(5p)**

4. Determinați numărul numerelor cu 4 cifre distincte ce se pot forma cu ajutorul cifrelor $\{0,1,2,3,4,5\}$. **(5p)**

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(0,2)$ și $C(4,4)$. Determinați ecuația medianei din C în triunghiul ABC. **(5p)**

6. Determinați aria triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=4$ și $\cos A=\frac{4}{5}$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+y+mz &= 3\\ mx+2y+z &= 5\\ x+my+2z &= 4\end{cases}$, unde m este un parametru real.

a) Rezolvați sistemul pentru $m=3$. **(5p)**

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea atașată sistemului să fie inversabilă. **(5p)**

c) Demonstrați că sistemul este compatibil determinat pentru orice $m\in\mathbb{N}$. **(5p)**

2. Fie polinomul $f=X^3-nX^2+mX-12$, $n,m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați parametrii reali m și n astfel încât polinomul să admită rădăcina dublă $x=2$. **(5p)**

b) Pentru $m=16$ și $n=7$ descompuneți polinomul în factori ireductibili. **(5p)**

c) Dacă $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt rădăcinile polinomului, calculați $x_1^4+x_2^4+x_3^4$ în funcție de m și n. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)+x$.

a) Calculați $f'(x)$. **(5p)**

b) Verificați dacă funcția admite asimptote. **(5p)**

c) Arătați că funcția este convexă pe $(-1,1)$. **(5p)**

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n>0}$, $I_n=\int\limits_0^1 \frac{x^n}{(x-2)(x-3)}dx$.

---

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

a) Calculați I_0. **(5p)**

b) Arătați că $I_{n+2} - 5I_{n+1} + 6I_n = \dfrac{1}{n+1}$. **(5p)**

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$. **(5p)**

TESTUL 2

Marius Macarie [2]

SUBIECTUL I (30p)

1. Determinați partea reală și partea imaginară a numărului complex $z = \dfrac{3+4i}{3-i}$. **(5p)**

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 5x - m$, $m \in \mathbb{R}$. Determinați parametrul real m astfel încât vârful parabolei asociate să fie în al doilea cadran. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 6x + 9) = 2$. **(5p)**

4. Aflați numărul funcțiilor injective $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ pentru care $f(1) = 4$. **(5p)**

5. Determinați ecuația perpendicularei pe dreapta de ecuație $2x + 3y - 5 = 0$, care trece prin $A(2,3)$. **(5p)**

6. Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc relația $\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)+\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x) = 0$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^a & 2^b \\ 4 & 4^a & 4^b \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $D(1,2)$. **(5p)**

b) Arătați că $D(a,b) = 4(2^{a-1} - 1)(2^{b-1} - 1)(2^b - 2^a)$. **(5p)**

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $D(x, x^2) = 0$. **(5p)**

2. Fie polinomul $f = X^4 - mX^3 + nX^2 - 4X + 4$, $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Determinați parametrii reali m și n astfel încât polinomul să admită două rădăcini duble. **(5p)**

b) Pentru $m = 4$ și $n = 5$ determinați rădăcinile polinomului. **(5p)**

c) Arătați că pentru orice $m^2 < 2n$ polinomul nu are toate rădăcinile reale. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|}$.

a) Calculați $f'(x)$. **(5p)**

b) Verificați dacă funcția admite asimptote. **(5p)**

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f. **(5p)**

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n>0}$, $I_n = \int\limits_0^1 (1+x)^n e^x dx$.

a) Calculați I_2. **(5p)**

b) Arătați că $I_n + nI_{n-1} = 2^n e - 1$. **(5p)**

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. **(5p)**

TESTUL 3

Daniel Valentin Fugulin [3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Calculați partea imaginară a numărului complex $z = \dfrac{1+i}{1-i}$. **(5p)**

2. Aflați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 + 2mx + 5 = 0$ să verifice relația $x_1^2 + x_2^2 = 26$. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = x - 1$. **(5p)**

4. Calculați probabilitatea ca alegând o submulțime din mulțimea tuturor submulțimilor nevide ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, submulțimea aleasă să conțină un număr impar de elemente. **(5p)**

5. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = (m-1)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ să fie perpendiculari. **(5p)**

6. Să se calculeze $\sin\dfrac{\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{\pi}{8}$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases}$, m parametru real.

a) Calculați determinantul matricei sistemului. **(5p)**

b) Să se determine m pentru care sistemul are o infinitate de soluții. **(5p)**

c) Pentru $m = 2$ determinați soluția (x_0, y_0, z_0) pentru care $2x_0 + y_0 = z_0^2 - 2$. **(5p)**

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + pX + q$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale acestuia.

a) Calculati $f(1) + f(-1)$. **(5p)**

b) Demonstrați că pentru orice $p > 0$, polinomul nu are toate rădăcinile reale. **(5p)**

c) Să se determine p, q și rădăcinile polinomului f, știind că $x_1 = 2 - i$ este o rădăcină a polinomului. **(5p)**

[3] Profesor, Liceul teoretic „Ion Mihalache”, Topoloveni, danfugulin@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

a) Să se determine asimptotele funcției f. **(5p)**

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 0$. **(5p)**

c) Demonstrați că $e^x \geq 1 + \ln(1+x)$, $\forall\, x \geq 0$. **(5p)**

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$. **(5p)**

c) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1/e$ și $x = e$. **(5p)**

TESTUL 4

Mihaela Gabor [4]

SUBIECTUL I (30p)

1. Arătați că numerele $a = \sqrt[4]{16}$, $b = 3!$, $c = \log_2 1024$ formează o progresie aritmetică. **(5p)**

2. Determinați imaginea funcției $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_{2x} 64 = 2$. **(5p)**

4. Care este probabilitatea ca alegând o funcție $f : \{1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$, aceasta să fie bijectivă? **(5p)**

5. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat cu latura 3. Calculați $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FE}$. **(5p)**

6. Determinați numărul real m pentru care punctele $A(1, m)$, $B(m, 4)$, $C(3, m+4)$ sunt coliniare. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + by + cz &= 4 \\ cx + ay + bz &= 4 \\ x + y + z &= 3 \end{cases}$, unde a, b, $c \in \mathbb{R}$ și fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului.

a) Calculați $A \cdot A^t$, unde cu A^t s-a notat matricea transpusă. **(5p)**

b) Pentru $b = c = 1$ și $a = 2$ rezolvați sistemul dat. **(5p)**

c) Dacă matricea A nu este inversabilă iar a, b, c reprezintă laturile unui triunghi, arătați că triunghiul este echilateral. **(5p)**

2. Se consideră polinomul $P(X) = X^3 - aX^2 - X + 2$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = -2$ calculați $P(i)$. **(5p)**

[4] Profesor, Colegiul Național ,,Constantin Carabella”, Târgoviște, mihaela_gab0r@yahoo.com

b) Pentru $a = 2$ determinați soluțiile ecuației $P(X) = 0$. **(5p)**

c) Arătați că pentru $a = 0$, soluțiile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $P(X) = 0$ verifică relația $x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10} = 62$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-q\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + px + p}{x + q}$, unde p și $q \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $p = q = 2$, calculați $f(0) + f'(0)$. **(5p)**

b) Pentru $p = q = 2$, determinați intervalele de monotonie ale funcției f. **(5p)**

c) Găsiți o relație între p și q astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = 1$. **(5p)**

2. Se consideră funcțiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 + mx + 1$ și șirul de integrale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{f_0(x)}dx$.

a) Aflați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\displaystyle\int_1^2 f_m(x)dx = 10/3$. **(5p)**

b) Calculați I_1. **(5p)**

c) Arătați că $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. **(5p)**

TESTUL 5

Antonio-Mihail Nuică [5]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se determine $\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2020}$. **(5p)**

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2(x^2 - 3x + 4) = 1$. **(5p)**

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care vârful parabolei de ecuație $y = x^2 - 2mx + 1$ este în cadranul I. **(5p)**

4. Să se calculeze $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **(5p)**

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$. **(5p)**

6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, cu $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y + z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ mx + y + z &= 3m \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio.nuica@upit.ro

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică. **(5p)**

b) Pentru $m = 2$ să se rezolve sistemul. **(5p)**

c) Pentru $m = 1$ să se rezolve sistemul. **(5p)**

2. Se consideră matricele de forma $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 3^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ și $G = \{A(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se arate că G este parte stabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor. **(5p)**

b) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup și este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$. **(5p)**

c) Să se calculeze $A(x)^{2020}$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Să se arate că f poate fi prelungită prin continuitate în 0. **(5p)**

b) Să se determine punctele de extrem ale prelungirii prin continuitate a lui f. **(5p)**

c) Să se determine intervalele de convexitate și punctele de inflexiune ale lui f. **(5p)**

2. Fie $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[n]{x^m + 1}} dx$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Să se calculeze $I_{2,2}$. **(5p)**

b) Să se calculeze $I_{4,2}$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_{2,n}$. **(5p)**

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Maria-Crina Diaconu [1]

SUBIECTUL I

Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y=0 \end{cases}$, $(x,y,z) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

a) Să se rezolve sistemul.
b) Să se arate că ecuația $MX = I_2$, cu $X \in M_{3,2}(\mathbb{C})$ are o infinitate de soluții.
c) Să se arate că ecuația $YM = I_3$, cu $Y \in M_{3,2}(\mathbb{C})$ nu are soluție.

SUBIECTUL al II-lea

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + 1 + \frac{x^2}{2}$. Notăm prin $f^{(n)}(x)$ derivata de ordin n a funcției f în punctul x.

a) Să se arate că $f^{(2)}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
b) Să se demonstreze relația $\sin x + \dfrac{x^2+\pi^2}{2} \geq \dfrac{(x+\pi)^2}{4} + 2\cos\dfrac{x}{2}$.
c) Calculați: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - \frac{x^2}{2} - 1] \max(\sin x, \cos x) dx$.

SUBIECTUL al III-lea

Se dă $E(x) = 1 - \dfrac{2}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se calculeze $E(\frac{5\pi}{6}) - 2E(\frac{11\pi}{3})$.
b) Să se arate că $E(x) = 1 + \operatorname{tg}(2x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
c) Să se rezolve ecuația trigonometrică $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

Testul 2

Jane Vieru [2]

SUBIECTUL I

Se consideră legea de compoziție ,,$*$" pe mulțimea numerelor reale, $x * y = 5xy - 5x - 5y + m$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, cunoscând că legea ,,$*$" este asociativă.
b) Pentru $m = 6$, să se rezolve ecuția $x * x' = 1 + \dfrac{5}{x}$, unde x' este simetricul lui x.
c) Se consideră $G = (1, \infty)$. Pentru $m = 6$, să se rezolve în G sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2 * y^2 &= z^2 \\ x^2 * z^2 &= y^2 \\ y^2 * z^2 &= x^2 \end{cases}.$$

d) Pentru $m = 6$ să se calculeze $1^2 * 2^2 * \cdots * 2020^2$.

[1] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com
[2] Profesor, Liceul Tehnologic ,,Victor Slăvescu" Rucăr, jane.vieru@yahoo.com

SUBIECTUL al II-lea

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}e^x$.

a) Să se determine imaginea funcției f.
b) Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției.
c) Pentru $m \in \mathbb{R}$ să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = (m-x)e^x$.
d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n \left[\dfrac{f(x)}{xe^x}\right]^2 dx$.

SUBIECTUL al III-lea

În planul xOy se consideră punctele $A(-2, \frac{4}{3})$, $B(6,4)$, $C(4, -\frac{8}{3})$ și $D(-4, -\frac{16}{3})$.

a) Să se arate că punctele A, B, C, D formează un paralelogram.
b) Să se arate că punctele A, O, C sunt coliniare, dar punctele B, O, D nu sunt coliniare.
c) Pe diagonala AC se consideră punctul M astfel încât $AM = \frac{1}{6}AC$ și punctul N pe latura AD astfel încât $AN = \frac{1}{5}AD$. Să se demonstreze că punctele B, M, N sunt coliniare.
d) Să se determine aria triunghiului AMN.

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât:
$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0,$$
pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Demonstrați că:
$$2 \leq (1-x)^n + (1+x)^n \leq 2^n,\ \forall x \in (-1,1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Discutați cazurile de egalitate.
3. Fie funcția polinomială
$$f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) = x^3 + ax + b,\ \text{unde } a, b \in \mathbb{R}.$$
Să se arate că în mod necesar $a \leq 0$ și $b \geq 0$.
4. Să se rezolve în $\mathbb{R}^3$ sistemul
$$\begin{cases} \beta x + \alpha y &= \gamma \\ \gamma x + \alpha z &= \beta \\ \gamma y + \beta z &= \alpha \end{cases}$$
unde $\alpha, \beta,\ \gamma$ sunt parametrii reali.
5. Fie K mulțimea tuturor matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de forma
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

a) Arătați că mulțimea K este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că operațiile induse conferă lui K o structură de corp.
b) Dacă tripletul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ reprezintă corpul numerelor complexe, stabiliți izomorfismul:

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \simeq (K, +, \cdot).$$

Analiză Matematică

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale convergente și $(c_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general dat de

$$c_n = \max\{a_n, b_n\},\ \forall n \geq 1.$$

   a) Să se arate că șirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
   b) Să se calculeze limitele șirurilor cu termenii generali:

$$c_n = \max\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\},\ \forall n \geq 1$$

$$c'_n = \max\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \frac{n}{n+1}\right\},\ \forall n \geq 1.$$

2. a) Dați definiția noțiunii de limită a unei funcții într-un punct.
   b) Studiați existența limitei în punctul $x_0 = 0$ pentru funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0 \\ x^2 + x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Fie funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + (a-2)x + 1 - a, & \text{dacă } x < 1 \\ b \cdot \ln x, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$$

   cu parametri a, b din $\mathbb{R}$.
   a) Să se studieze continuitatea funcției f pe $\mathbb{R}$.
   b) Să se studieze derivabilitatea funcției f pe $\mathbb{R}$.
   c) Pentru cazul $a = b$ să se determine parametrul real astfel încât funcția f să admită un punct de extrem local.
4. Fie funcția

$$f : [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 - 3|x-2|}{x^2 + 1}.$$

   a) Arătați că f este integrabilă.
   b) Calculați $\int_0^4 f(x)dx$.
5. Fie

$$I(x) = \int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} du,\ x > 1.$$

   a) Să se calculeze $I(x)$, folosind schimbarea de variabilă $u = \frac{1}{t}$.
   b) Să se rezolve ecuația

$$I(x) = \frac{\pi}{12}.$$

Geometrie și Trigonometrie

1. a) Fie d o dreaptă care trece prin centrul de greutate al unui triunghi și nu conține nici un vârf al acestuia. Să se arate că suma distanțelor celor două vârfuri situate de aceeași parte a dreptei la această dreaptă este egală cu distanța celui de-al treilea vârf la dreapta d.
   b) Arătați că distanța de la centrul de greutate al unui triunghi la o dreaptă exterioară din planul său este media aritmetică a distanțelor celor trei vârfuri la această dreaptă.
2. Se consideră două puncte distincte M și N interioare cubului $ABCDA'B'C'D'$ de latură a. Fie M' și N' proiecțiile lor pe una din fețele cubului. Se cere:
   a) $Aria(MNN'M') < a^2\sqrt{2}$.
   b) $MN < a\sqrt{3}$.
   c) Dacă se iau nouă puncte interioare cubului, atunci există două dintre ele având distanța mai mică decât $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
3. a) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:
$$1 + \cos A \cos(B - C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}.$$
   b) Să se discute și să se rezolve ecuația:
$$\cos 2x + (2m - 1)\sin x + m - 1 = 0,\ \ m \in \mathbb{R}.$$
4. Fie $A(1, 3)$ și $B(2, 5)$ două puncte din planul xOy. Se cere:
   a) Să se determine punctul $M(\alpha, 0)$ astfel încât $MA + MB$ să fie minimă.
   b) Să se scrie ecuația locului geometric al punctului P din plan cu proprietatea $PA \perp PB$.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 1996)

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Maria-Crina Diaconu [1]

1. Soluția inecuației $\sqrt{4-x}-\sqrt{2-\sqrt{3+x}}>0$ este:

   a) $x \in \mathbb{R}^*$; b) $x \in [-3,1]$; c) $x \in (\frac{\sqrt{5}-3}{2}, 1]$; d) $x \in (-2,1)$; e) $x \in (-3,2)$.

2. Se consideră matricea $Z = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{C}$. Atunci:

   a)$Z^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}x^n & 0 & 2^{n-1}x^n \\ 0 & y^n & 0 \\ 2^{n-1}x^n & 0 & 2^{n-1}x^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; b)$Z^n = \begin{pmatrix} 2^n x^n & 0 & 2^n x^n \\ 0 & y^n & 0 \\ 2^n x^n & 0 & 2^n x^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

   c)$Z^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}x^{n-1} & 0 & 2^{n-1}x^{n-1} \\ 0 & y^n & 0 \\ 2^{n-1}x^{n-1} & 0 & 2^{n-1}x^{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; d)$Z^n = \begin{pmatrix} 2^n x^n & 0 & 2^n x^n \\ 0 & y^{n-1} & 0 \\ 2^n x^n & 0 & 2^n x^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

   e)$Z^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}x^n & 0 & 2^{n-1}x^n \\ 0 & y^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1}x^n & 0 & 2^{n-1}x^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Sistemul $\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+y+az=2-a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ este compatibil dublu nedeterminat pentru:

   a) $a \neq 1$; b) $a = 1$; c) $a = -2$; d) $a = 0$; e) $a = 2$.

4. Fie polinomul $f(X) = X^2 + 3X + 9$ având rădăcinile x_1, x_2. Notăm $S_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci S_6 este:

   a) $2^2 \cdot 27$; b) $3^4 \cdot 2$; c) $3^5 \cdot 2^3$; d) 27; e) $2 \cdot 27^2$.

5. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarea lege de compoziție pe $\mathbb{R}$ să fie comutativă și asociativă: $x * y = 2xy + nx + my$.

   a) $m = n \in \mathbb{R}$; b) $m = n = 2$; c) $m = n = 0$ și $m = n = 1$;

   d) $m, n \in \mathbb{R}$; e) $m = 1; n = 2$.

6. Se consideră șirul $a_n = \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$:

   a) $+\infty$; b) 1; c) -1; d) 0; e) $-\infty$.

7. Fie funcția $f(x) = \arccos(\frac{2x}{x^2+1})$. Atunci domeniul maxim de definiție este:

   a) $\mathbb{R}^*$; b) $(-\infty, 1)$; c) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

8. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x}$. Să se calculeze $g'(\frac{e^2-1}{e})$ unde g este inversa funcției f.

   a) $\frac{e}{e^2+1}$; b) $\frac{e^2}{e+1}$; c) $\frac{e}{e^2-1}$; d) $\frac{e^2}{e-1}$; e) $\frac{1}{e}$.

[1] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Atunci:

   a) $F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\,(\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}), \forall x \in [0, \pi]$; b) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{3}}), \forall x \in [0, \pi]$;

   c) $F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\,(\frac{\mathrm{tg}\,x}{2\sqrt{3}}), \forall x \in [0, \pi]$; d) $F(x) = 2\sqrt{3}\mathrm{arctg}\,(\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}), \forall x \in [0, \pi]$;

   e) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,(\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}), \forall x \in [0, \pi]$.

10. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^2 (2x - x^2)^n dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

    a) $I_n = \frac{n}{n+1}I_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$; b) $2I_n = \frac{2n}{n+1}I_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$;

    c) $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$; d) $(n+1)I_n = 2nIn - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$;

    e) $2nI_n = (n+1)I_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

11. Să se determine n minim, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care $(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n \in \mathbb{Z}$:

    a) $n = 1$; b) $n = 5$; c) $n = 2$; d) $n = 3$; e) $n = 4$.

12. Raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic având lungimile catetelor a, b, iar lungimea ipotenuzei c este:

    a) $\frac{ac}{a+b+c}$; b) $\frac{bc}{a+b+c}$; c) $\frac{ab}{a+b+c}$; d) $\frac{abc}{a+b+c}$; e) $\frac{a+b+c}{abc}$.

13. Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi, atunci $\cos A + \cos B + \cos C$ este:

    a) $1 - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; b) $1 + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$; c) $1 + 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;

    d) $1 - 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; e) $1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

14. Soluțiile ecuației $\sin(4\mathrm{arctg}\,x) = 1$ sunt:

    a) $S = \{\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) |\ k \in \mathbb{Z}\}$; b) $S = \{\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) |\ k \in \mathbb{Z}\}$;

    c) $S = \{\mathrm{tg}\,(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) |\ k \in \mathbb{Z}\}$; d) $S = \{\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{8}) |\ k \in \mathbb{Z}\}$;

    e) $S = \{\mathrm{tg}\,(-\frac{3\pi}{8} + 2k\pi) |\ k \in \mathbb{Z}\}$.

15. Să se calculeze $\sin^2 x$, știind că $\mathrm{ctg}\,x = 2\sqrt{6}$:

    a) $\frac{2}{23}$; b) $\frac{3}{22}$; c) $\frac{1}{25}$; d) $\frac{4}{27}$; e) $\frac{5}{21}$.

Testul 2

D.M.I. [2]

1. Se consideră funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2mx - 1 & \text{dacă } x \leq 0 \\ mx - 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}, \ (m \neq 0).$$

Funcţia este injectivă pentru

a) $m \in (-\infty, 0)$; b) $m \in (-\infty, 1)$; c) $m \in (0, \infty)$; d) $m \in (2, \infty)$; e) $m \in (1, \infty)$.

2. Numărul $t = \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} - \sqrt{5}$ este egal cu

a) $t = -2$; b) $t = 2 + \sqrt{5}$; c) $t = 2 - \sqrt{5}$; d) $t = \sqrt{5} - 1$; e) $t = 2\sqrt{5}$.

[2] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

3. Suma rădăcinilor ecuaţiei $\sqrt[3]{10-x}+\sqrt{x-1}=3$ este

a) 39; b) 49; c) 12; d) 2; e) 47.

4. Cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul

$$N(x)=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2\frac{8}{x}$$

pentru $x\in(1,64)$ este

a) 81; b) 84; c) 28; d) 305; e) 16.

5. Fie dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)^n$. Valoarea lui $n\in\mathbb{N}^\star$ pentru care al treilea termen nu îl conţine pe x este

a) $n=5$; b) $n=6$; c) $n=8$; d) $n=7$; e) $n=4$.

6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică având raţia $r>0$. Dacă $a_2+a_4=16$ și $a_1\cdot a_5=28$, atunci

a) $r=2$; b) $r=3$; c) $r=5$; d) $r=\dfrac{1}{3}$; e) $r=4$.

7. Polinomul cu coeficienţi reali

$$P=X^5+(m+1)^2X^4+3mx^3+(4m-1)X^2+(3m-1)X-5$$

se divide cu X^2+1 dacă şi numai dacă

a) $m\in(-1,3)$; b) $m\in(0,1)$; c) $m=-1$; d) $m=3$; e) $m\in\{-1,3\}$.

8. Se consideră matricea

$$A=\begin{pmatrix}1 & \omega\\ \omega^2 & 1\end{pmatrix},\ \text{cu } \omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Dacă $A^2+A^3+\cdots+A^n=\alpha_n\cdot A$, atunci $\alpha_n=$

a) 2^n+1; b) 2^n-2; c) 2^n-3; d) 2^n; e) $2-2^n$.

9. Şirul

$$x_n=\frac{n}{3-(-1)^n},\quad n\geq 1$$

a) are limita $+\infty$. b) are limita $\frac{1}{3}$. c) are limita 0. d) nu are limită. e) are limita $-\infty$.

10. Dacă

$$L=\lim_{x\searrow 0}\left(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$$

atunci

a) $L = e^{-\frac{1}{5}}$; b) $L = e^{\frac{1}{2}}$; c) $L = 0$; d) $L = 1$; e) $L = e^{\frac{1}{3}}$.

11. Se consideră funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{3 + \cos x}.$$

Atunci $f'\left(\frac{7\pi}{2}\right) =$

a) $\frac{2}{9}$; b) $-\frac{1}{9}$; c) $-\frac{2}{9}$; d) 0; e) $\frac{1}{9}$.

12. Mulţimea punctelor de extremum local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, & |x| \geq 1, \\ e - e^{x^2}, & |x| < 1, \end{cases}$$

este

a) $\{-1, 1\}$; b) $\{0\}$; c) $\{-1, 0, 1\}$; d) $\{0, 1\}$; e) $\{-1, 0\}$.

13. Numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

este

a) 0; b) 4; c) 1; d) 3; e) 2.

14. Dacă

$$I_1 = \int_0^2 (2 - x)dx \text{ şi } I_2 = \int_0^2 xdx,$$

atunci

a) $I_1 = I_2$; b) $I_1 - I_2 = 1$; c) $I_1 > I_2$; d) $I_2 - I_1 = 1$; e) $I_1 < I_2$.

15.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2\cos x} =$$

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}} - 1$; b) $\sqrt{5}\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{5}}\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{2}{\sqrt{5}}\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$; e) $2 - \text{arctg}\,\sqrt{5}$.

Testul 3

D.M.I. [3]

1. Valorile lui $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pentru care expresia

$$E = \frac{(m+1)x^2 + 8mx + 8}{x^2 - mx + 4}$$

este definită şi pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ sunt

a) $m \in [-2, 1)$; b) $m \in (-1, 1]$; c) $m \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; d) $m \in [2, 3)$; e) $m \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right]$.

2. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $|x^2 - 3x + 2| < |x + 2|$ este

a) $(1, 4)$; b) $(1, 2)$; c) $(0, 4)$; d) $\emptyset$; e) $[0, 4]$.

3. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 27}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 + 27}} = 2$$

este egal cu

a) 3; b) 2; c) 0; d) 4; e) 1.

4. Soluţia ecuaţiei

$$2^{|x+1|} - |2^x - 1| = 2^x + 1$$

este

a) $x = -2$; b) $x \in (0, \infty)$; c) $x \in (-\infty, 1)$; d) $x \in [0, \infty) \cup \{-2\}$; e) $x \in [-1, 0]$.

5. Dacă $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică şi $S_n = 2(5^n - 1)$, atunci $b_4 =$

a) 125; b) 1000; c) 1024; d) 625; e) 200.

6. Ecuaţia

$$2x^4 + x^3 + mx^2 + x + 2 = 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

are toate rădăcinile reale pentru

a) $m \in (-2, 2)$; b) $m = 3$; c) $m \in (-\infty, -6]$; d) $m \in (-6, \infty)$; e) $m \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

7. Fie polinomul $f = x^4 + mx^3 + x^2 + nx - 1$. Dacă restul împărţirii lui f la $x - 2$ este -1 iar restul împărţirii lui f la $x - 3$ este 14, atunci $\{m, n\} =$

a) $\{2, 6\}$; b) $\{-3, 4\}$; c) $\{-3, 2\}$; d) $\{1, 2\}$; e) $\{2, 4\}$.

8. Valoarea sumei $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}$ este

[3] Universitatea din Piteşti, revista.matinf@upit.ro

a) $1+\dfrac{1}{(n+1)!}$; b) $1-\dfrac{1}{n!}$; c) $\dfrac{1}{n!}$; d) $1+\dfrac{1}{n!}$; e) $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$.

9.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

a) ∞; b) 2; c) 0; d) 1; e) $\dfrac{1}{2}$.

10. Limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

este

a) 2; b) $+\infty$; c) $\frac{3}{2}$; d) 0; e) $\frac{1}{2}$.

11. Dacă

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

atunci

a) $L=\frac{1}{n}$; b) $L=0$; c) $L=\frac{2}{n^2}$; d) $L=1$; e) $L=\infty$.

12. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x\leq 0,\\ \sin x, & \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

Atunci $x=0$ este

a) punct de întoarcere. b) punct critic. c) punct unghiular.

d) punct de extremum global. e) punct de inflexiune.

13. Fie

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=(x-a)e^x+|x+2|,\quad a\in\mathbb{R}.$$

Să se precizeze care din afirmaţiile următoare este corectă:

a) $y=-x-2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

b) $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

c) Graficul funcţiei nu are asimptote oblice.

d) $y=x+3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

e) $y=x-2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

14.

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx=$$

a) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$; b) $2\ln 2 - 3$; c) $\pi - \ln 2$; d) $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$; e) $2 + \frac{\pi}{2}$.

15.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left|x^3 - x\right| dx =$$

a) $\frac{1}{3}$; b) 1; c) -2; d) 0; e) ∞.

Testul 4

Raluca Mihaela Georgescu [4]

1. Valoarea parametrului real m pentru care punctul $A(2, m)$ aparține dreptei de ecuație $5x + 4y + 6 = 0$ este:

   a) -4; b) -2; c) 4; d) 2; e) 1.
2. Se dau vectorii: $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{w} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Atunci vectorul $2\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$ este:

   a) $15\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}$; b) $13\overrightarrow{i} + 18\overrightarrow{j}$; c) $-13\overrightarrow{i} + 18\overrightarrow{j}$; d) $12\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$; e) $15\overrightarrow{i} + 18\overrightarrow{j}$.
3. Aria triunghiului ABC cu $AB = 4$, $AC = \sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle A) = 75°$ este:

   a) $\sqrt{3} + 2$; b) $2(\sqrt{3} + 2)$; c) $\sqrt{3} + 1$; d) $\sqrt{2} + 1$; e) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
4. Valoarea expresiei $E(x) = \sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ pentru $x = \frac{\pi}{3}$ este

   a) 0; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3} - 1$; d) $1 - \sqrt{3}$; e) 1.
5. În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră triunghiul ABC, cu $A(2, 3)$, $B(4, 5)$, $C(1, 7)$. Ecuația medianei din C este:

   a) $3x - 2y + 7 = 0$; b) $3x + 2y - 17 = 0$; c) $3x + 3y - 17 = 0$; d)$-3x + 2y - 1 = 0$; e) $x + 2y + 17 = 0$.
6. Valoarea parametrului real a pentru care vectorii $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ sunt perpendiculari este

   a) 8; b) -8; c) 4; d) 1; e) -4.
7. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB = 5 + \sqrt{7}$, $AC = 5 - \sqrt{7}$. Atunci lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ este

   a) 8; b) 6; c) 10; d) 12; e) 1.
8. Aria triunghiului echilateral având raza cercului circumscris egală cu 2 este

   a) $\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{3}$; c) 3; d) 4; e) 2.
9. Dacă $2\sin x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\operatorname{tg} x$ este

   a) -3; b) $\sqrt{3}$; c)$-\sqrt{3}$; d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
10. Valorile parametrului real a pentru care aria triunghiului ABC, cu $A(6, 2)$, $B(2, -1)$, $C(4, a)$ este 3 sunt:

    a) $\{-1\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-2, 4\}$; d) $\{-1, 2\}$; e) 1.

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

11. Catetele unui triunghi dreptunghic sunt 8 și $4\sqrt{5}$. Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este

a) $\dfrac{13}{2}$; b) 6; c) 12; d) 4; e) $\dfrac{15}{2}$.

12. Aria triunghiului ABC cu $AB = \sqrt{5}$, $AC = 3$ și $\operatorname{tg} A = 2$ este

a) 4; b) $2\sqrt{5}$; c) 3; d) 5; e) 2.

13. Dacă în triunghiul ABC se cunosc $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{21}$, atunci $\operatorname{ctg} A$ este:

a) $\sqrt{3}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; c) $-\sqrt{3}$; d) 3; e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

14. Fie triunghiul ABC cu $A(2,3)$, $B(5,7)$ și centrul de greutate $G(4,2)$. Atunci coordonatele punctului C sunt:

a) $C(-5,4)$; b) $C(5,4)$; c) $C(5,-4)$; d) $C(3,4)$; e) $C(-1,3)$.

15. În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(5,2)$. Coordonatele unui punct C pentru care $AB \perp AC$ și $BC = \sqrt{85}$ sunt:

a) $C(3,-7)$ sau $C(-1,9)$; b) $C(3,-7)$; c) $C(-1,9)$; d) $C(3,-8)$; e) $C(1,-7)$.

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Nicoleta Voica [1], *Adrian Voica* [2]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect. Fiecare răspuns corect se notează cu 4 puncte.

1. Variabilele x și y sunt de tip întreg. Care este valoarea expresiei C/C++ **abs(x-y)** în urma execuției secvenței următoare? **(4p.)**

```
x = 5; y = 16; x = (x+y)/2; y = y - x/2;
```

a) 0.25 b) 3 c) 4 d) 1

2. Variabilele `i` și `j` sunt de tip întreg. Indicați cu ce se pot înlocui punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze numerele de mai jos, în această ordine. **(4p.)**

```
for (i=0;i<5;i++)
    {for(j=0;j<5;j++)
     .....................;
     cout<<endl;
     }
```

```
3 3 3 3 3
3 7 7 7 3
3 7 7 7 3
3 7 7 7 3
3 3 3 3 3
```

3. Fie un șir $x = (10, -13, 8, -2, 9)$ cu $n = 5$ numere reale. Care este numărul de interschimbări care se efectuează asupra șirului, dacă acesta se ordonează crescător folosind metoda bulelor (Bubble Sort)? **(4p.)**

a) 40 b) 10 c) 7 d) 5

4. Se consideră un tablou unidimensional `x` cu `n` elemente numerotate de la `1` la `n`. Care dintre secvențele următoare permută circular spre dreapta elementele tabloului cu `k` poziții? **(4p.)**

a)
```
for(i=1;i<=k;i++)
  { for(j=1;j<n;j++)
         x[j]=x[j+1];
    x[n]=x[1];
  }
```

b)
```
while(k>0)
{ aux=x[n];
for(i=n;i>1;i--)
    x[i]=x[i-1];
x[1]=aux;
k--; }
```

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Ion C. Brătianu", Pitești, nvoica71@yahoo.fr
[2] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Barbu", Pitești, avoica71@yahoo.com

c)
```
for(i=1;i<=k;i++)
        x[n+i]=x[i];
for(i=1;i<=n;i++)
        x[i]=x[i+k];
```

d)
```
for(i=1;i<=k;i++)
          x[i]=x[i+k+1];
```

5. Variabilele x, y și z sunt de tip întreg. Care este numărul de atribuiri care se efectuează în următoarea secvență și valoarea variabilelor x, y și z la final? **(4p.)**

```
x = 3; y = 5; z = 1;
do {x = y + z;
    y = y - 2;
    z = z + 1;
    } while(z < y);
```

a) 9 3 5 1   b) 6 5 1 3   c) 3 5 1 3   d) 9 5 1 3

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerinţele următoare.

1. Se consideră algoritmul următor, scris în pseudocod. S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x iar cu $x\%y$ restul împărțirii numărului întreg x la numărul întreg nenul y.

```
citeste x (numar natural)
cat timp x≠0 executa
|   z←10
|   y←x%10
|   cat timp x>9 executa
|    |   x←[x/10]-1
|    |   y←x%10*z+y
|    |_  z←z*10
|    scrie y
|_   citeste x (numar natural)
```

a) Scrieţi ce se va afișa dacă se citesc în această ordine valorile: 138 57 9 2148 5708 300 0. **(6p.)**

b) Precizaţi un șir de 4 valori distincte ce pot fi citite astfel încât să se afișeze doar valori nule (egale cu zero). **(6p.)**

c) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat care să utilizeze structuri repetitive de alt tip. **(6p.)**

d) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Pentru un punct dat A pentru care se cunosc coordonatele x și y să se scrie o condiție care are valoarea 1 dacă și numai dacă punctul se găsește pe una din axe și zero în caz contrar. **(6p.)**

3. Ştiind că s este un tablou unidimensional cu maxim 50 numere naturale de maxim o cifră, numerotarea acestora începând de la 0, și că inițial are valoarea (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), iar aux, i, j, di, dj sunt variabile de tip întreg, să se precizeze care va fi valoarea șirului în urma executării următoarei secvențe de program C/C++? **(6p.)**

```
di=1; dj=2;  i=0; j=9;
while (i < j)
     { aux=s[i]; s[i]=s[j]; s[j]=aux;
       i=i+di; j=j-dj;
       di=di+dj; dj=di-dj; di=di-dj;
     }
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerinţele următoare.

1. Se citește un număr natural n ($n \geq 10$) și se cere să se elimine din n o cifră astfel încât numărul obținut este cel mai mic dintre toate numerele ce se pot obține prin eliminarea câte unei cifre. Scrieți, în pseudocod, algoritmul de rezolvare a problemei enunțate.
   Exemplu: dacă $x = 12953$, atunci $y = 1253$. **(10p.)**
2. Să se scrie un program care citește un șir cu n numere întregi, $n \leq 1000$ și elimină din șir un număr minim de elemente astfel încât elementele rămase să formeze un șir în care oricare două elemente vecine să aibă parități diferite (primul element din șir nu se va elimina). **(10p.)**
   Exemplu: pentru $n = 6$ și șirul $(63, 56, 78, 73, 453, 34)$, se obține $(63, 56, 73, 34)$.
3. Fişierul text **bac.in** conţine pe primul rând un număr n ($n \leq 100$), iar pe următoarele n linii, n perechi (x, y) de numere naturale de maxim 9 cifre fiecare ($x, y > 3$), care reprezintă n intervale închise de numere naturale.

   a) Folosind un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei utilizate şi al timpului de executare scrieţi un program C/C++ care citeşte numerele din fişier şi determină pentru fiecare interval, dacă există, un număr prim z din interval astfel încât valoarea expresiei $|x + y - 2z|$ să aibă valoarea minimă. Rezultatele vor fi afișate în fişierul text **bac.out**, câte o valoare pe câte o linie a fișierului. Pentru intervalele pentru care nu există un astfel de număr prim se va afișa valoarea -1. **(6p.)**

   b) Descrieți în limbaj natural metoda utilizată justificând eficiența acesteia. **(4p.)**
   Exemplu: dacă fişierul **bac.in** are următorul conţinut:

   3

   7 18

   24 28

   30 50

   fișierul **bac.out** va fi:

   13

   -1

   41

Testul 2

Maria Miroiu [3]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie variabilele **a** și **b** de tip întreg, **a** memorând valoarea 3, iar **b** memorând valoarea 6. Care dintre expresiile C/C++ de mai jos **nu** are valoarea 4.5? **(4p.)**

[3] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

a) `(a+b)/2.0` c) `float((a+b)/2)`
b) `(float(a)+b)/2` d) `float(a+b)/2`

2. Care dintre expresiile C/C++ de mai jos este echivalentă cu `i<=sqrt(n)`? **(4p.)**

   a) `i+i<=n` c) `floor(i)<=n`
   b) `ceil(i)<=n` d) `i*i<=n`

3. Pentru tabloul unidimensional `v` = (1,3,5,7,8,9), câte comparații se fac aplicând metoda căutării binare pentru valoarea 8? **(4p.)**

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

4. În secvența C/C++ alăturată, variabilele `i` și `x` sunt de tip întreg, iar variabila `v` este un tablou unidimensional cu indicii elementelor numerotați de la 1 la 6. Ce valoare are suma ultimelor 3 elemente din `v` în urma executării secvenței alăturate? **(4p.)**

```
x=1;
for (i=1;i<=6;i++)
   {
    v[i]=x;
    x+=2;
   }
```

   a) 36 b) 27 c) 15 d) 21

5. În secvența C/C++ alăturată, variabilele `c`, `i` și `n` sunt de tip întreg. Ce va calcula variabila `c`? **(4p.)**

```
c=0;
for (i=1;i<=n;i++)
  if (n%i==0 && i%2==1)
    c++;
```

   a) numărul divizorilor pari ai lui `n`;
   b) numărul divizorilor impari ai lui `n`;
   c) numărul divizorilor primi ai lui `n`;
   d) numărul divizorilor improprii ai lui `n`.

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul alăturat, descris în pseudocod.

```
citeste n (numar natural)
a ← 1
b ← 1
pentru i←3,n executa
|    c ← a+b
|    a ← b
|_   b ← c
scrie c
```

   a) Scrieți ce valoare se va afișa dacă pentru variabila `n` se citește valoarea 7. **(6p.)**
   b) Scrieți cel mai mare număr care se poate citi ca valoare a variabilei `n`, astfel încât, în urma executării algoritmului, să afișeze un număr natural de 2 cifre. **(6p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura **pentru ... executa** cu o structură repetitivă cu test inițial. **(6p.)**
   d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Se consideră variabilele `h1` și `m1` care memorează orele și minutele sosirii unei mașini în parcare, respectiv variabilele `h2` și `m2` care memorează orele și minutele plecării mașinii din parcare, în aceeași zi. Orele au valori între 0 și 23. Scrieți o secvență de cod C/C++ prin

care se calculează numărul de ore petrecute în parcare, făcându-se rotunjire prin adaos. **(6p.)**

3. Se consideră două tablouri unidimensionale: `a` ce conține `m` elemente ordonate crescător și `b` ce conține `n` elemente ordonate descrescător. Elementele vectorilor se presupun numerotate începând de la 1. Completați cele 3 puncte de suspensie ce reprezintă o expresie logică și două instrucțiuni, astfel încât, după executarea secvenței de cod să se obțină vectorul **c** care conține toate elementele din `a` și `b`, ordonate descrescător. **(6p.)**

```
i=m; j=1; k=0;
while (...)
  if (a[i]>b[j])
    c[++k]=a[i--];
  else
    c[++k]=b[j++];
..................
..................
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citește de la tastatură un număr natural `n` de maxim 9 cifre. Să se scrie un program C/C++ care determină și afișează numărul `m` format din cifrele lui `n`, în ordinea în care apar în numărul `n`, eliminând prima cifră maximă și prima cifră minimă, de la dreapta numărului `n`. **(10p.)**
   Exemplu: Pentru `n = 681213` se obține `m = 6123`.
2. Se citește de la tastatură un număr natural nenul `n`. Scrieți un program C/C++ care determină dintre toate numerele mai mici sau egale decât **n** pe cel mai mic care are număr maxim de divizori naturali. **(10p.)**
   Exemplu: Pentru `n = 19` se va afișa valoarea `18`, acesta având `6` divizori naturali (precum are și numărul 12).
3. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a variabilei `n`, iar pe următoarea linie un șir de **n** numere naturale de cel mult 9 cifre fiecare, numerele fiind despărțite prin spații. Se cere să se stabilească dacă numerele din fișier formează un șir strict monoton (strict crescător sau strict descrescător), în ordinea în care apar în fișier. Se va afișa textul ”Da” dacă numerele formează un șir strict monoton, respectiv ”Nu” în caz contrar.
   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(3p.)**
   b) Scrieți un program C/C++ care citește datele din fișier și rezolvă problema. **(7p.)**

   Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

   9

   3 10 11 14 16 17 19 180

   atunci pe ecran se va afișa ”Da”.

Testul 3

Maria Miroiu [4]

Limbajul Pascal

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie variabilele **a** și **b** de tip întreg, **a** memorând valoarea 3, iar **b** memorând valoarea 6. Care dintre expresiile Pascal de mai jos **nu** are valoarea 4.5? **(4p.)**

   a) `(a+b)/2` c) `trunc((a+b)/2)`
   b) `(trunc(a)+b)/2` d) `a+b/2`

2. Care dintre expresiile Pascal de mai jos este echivalentă cu `i<=sqrt(n)`? **(4p.)**

   a) `i+i<=n` c) `round(i)<=n`
   b) `trunc(i)<=n` d) `sqr(i)<=n`

3. Pentru tabloul unidimensional `v` = (1,3,5,7,8,9), câte comparații se fac aplicând metoda căutării binare pentru valoarea 8? **(4p.)**

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

4. În secvența Pascal alăturată, variabilele `i` și `x` sunt de tip întreg, iar variabila `v` este un tablou unidimensional cu indicii elementelor numerotați de la 1 la 6. Ce valoare are suma ultimelor 3 elemente din `v` în urma executării secvenței alăturate? **(4p.)**

```
x:=1;
for i:=1 to 6 do
   begin
    v(i):=x;
    x:=x+2;
   end;
```

   a) 36 b) 27 c) 15 d) 21

5. În secvența Pascal alăturată, variabilele `c`, `i` și `n` sunt de tip întreg. Ce va calcula variabila `c`? **(4p.)**

```
c:=0;
for i:=1 to n do
if (n mod i=0)and(i mod 2=1)
then
    c:=c+1;
```

   a) numărul divizorilor pari ai lui `n`;
   b) numărul divizorilor impari ai lui `n`;
   c) numărul divizorilor primi ai lui `n`;
   d) numărul divizorilor improprii ai lui `n`.

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

1. Se consideră algoritmul alăturat, descris în pseudocod.

```
citeste n (numar natural)
a ← 1
b ← 1
pentru i←3,n executa
|    c ← a+b
|    a ← b
|_   b ← c
scrie c
```

   a) Scrieți ce valoare se va afișa dacă pentru variabila `n` se citește valoarea 7. **(6p.)**
   b) Scrieți cel mai mare număr care se poate citi ca valoare a variabilei `n`, astfel încât, în urma executării algoritmului, să afișeze un număr natural de 2 cifre. **(6p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura **pentru ... executa** cu o structură repetitivă cu test inițial. **(6p.)**
   d) Scrieți programul Pascal corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Se consideră variabilele `h1` și `m1` care memorează orele și minutele sosirii unei mașini în parcare, respectiv variabilele `h2` și `m2` care memorează orele și minutele plecării mașinii din parcare, în aceeași zi. Orele au valori între 0 și 23. Scrieți o secvență de cod Pascal prin care se calculează numărul de ore petrecute în parcare, făcându-se rotunjire prin adaos. **(6p.)**

3. Se consideră două tablouri unidimensionale: `a` ce conține `m` elemente ordonate crescător și `b` ce conține `n` elemente ordonate descrescător. Elementele vectorilor se presupun numerotate începând de la 1. Completați cele 3 puncte de suspensie ce reprezintă o expresie logică și două instrucțiuni, astfel încât, după executarea secvenței de cod să se obțină vectorul **c** care conține toate elementele din `a` și `b`, ordonate descrescător. **(6p.)**

```
i:=m; j:=1; k:=0;
while (...) do
  if a[i]>b[j] then
  begin
  k:=k+1; c[k]:=a[i]; i:=i-1;
  end
  else
  begin
  k:=k+1; c[k]:=b[j]; j:=j+1;
  end;
..................
..................
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citește de la tastatură un număr natural `n` de maxim 9 cifre. Să se scrie un program Pascal care determină și afișează numărul `m` format din cifrele lui `n`, în ordinea în care apar în numărul `n`, eliminând prima cifră maximă și prima cifră minimă, de la dreapta numărului `n`. **(10p.)**
   Exemplu: Pentru `n = 681213` se obține `m = 6123`.
2. Se citește de la tastatură un număr natural nenul `n`. Scrieți un program Pascal care determină dintre toate numerele mai mici sau egale decât **n** pe cel mai mic care are număr maxim de divizori naturali. **(10p.)**
   Exemplu: Pentru `n = 19` se va afișa valoarea `18`, acesta având `6` divizori naturali (precum are și numărul 12).

3. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a variabilei `n`, iar pe următoarea linie un șir de **n** numere naturale de cel mult 9 cifre fiecare, numerele fiind despărțite prin spații. Se cere să se stabilească dacă numerele din fișier formează un șir strict monoton (strict crescător sau strict descrescător), în ordinea în care apar în fișier. Se va afișa textul "Da" dacă numerele formează un șir strict monoton, respectiv "Nu" în caz contrar.

   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(3p.)**

   b) Scrieți un program Pascal care citește datele din fișier și rezolvă problema. **(7p.)**

   Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

   9

   3 10 11 14 16 17 19 180

   atunci pe ecran se va afișa "Da".

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Nicoleta Enache [1]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se dă următoarea secvenţă în limbajul C/C++, unde x, y, s sunt numere întregi.

```
x=20;y=10;
s=++x-y--;
cout<<s<<'' ''<<x<<'' ''<<y;
```

Care vor fi cele trei valori afişate: **(4p.)**

a) 10 21 9 b) 11 21 9 c) 11 20 10 d) 11 21 10

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerinţele următoare.

2. Se consideră algoritmul de mai jos în pseudocod. S-a notat cu $x\%y$ restul împărțirii lui x la y.

```
citeste a (numar natural)
b←0
p←1
cat timp a>0 executa
|   c←a%10
|   daca c%2=0 atunci
|     |   b←p*c+b
|     |   p←p*10
|     |   b←p*c+b
|     |   p←p*10
|    altfel
|     |   b←p*c+b
|     |_  p←p*10
|   a←a/10
|_
scrie b
```

a) Ce afişează algoritmul pentru $a = 24583$? **(6p.)**

b) Care este cel mai mic număr de patru cifre distincte care, în urma executării acestui algoritm, va afişa numărul citit. **(4p.)**

c) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu algoritmul dat, în care structura repetitivă cât timp .... execută să se înlocuiască cu o altă structură repetitivă. **(6p.)**

d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 şi 2 scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Ion C. Brătianu”, Pitești, enache_nicoleta@yahoo.com

1. Fie dat un graf neorientat cu 5 noduri şi următoarele muchii: [1,2], [1,3], [1,4], [2,3], [2,5], [3,5], [4,3], [4,5]. Care dintre următoarele şiruri este lanţ elementar în graf? **(4p.)**

   a) 1 3 5 2 4 b) 1 2 5 3 1 4 c) 1 2 5 4 3 d) 2 5 1 3 4

2. Se dau următoarele declarații de structuri. **(6p.)**

```
struct dataexp
{
    int z, l, a;
};
struct medicament
{
    char denumire[50];
    dataexp de;
} m;
```

   Care dintre următoarele referiri este corectă din punct de vedere sintactic?

   a) m.de.a b) m.a. c) m.a.de. d) denumire.m

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

3. Care va fi valoarea afişată după executarea secvenţei alăturate, dacă **s** este variabilă de tip şir de caractere? **(4p.)**

```
char s[20]=''macarale'',*p;
p=strchr(s,'a');
while(p)
{
    strcpy(p,p+1);
    p=strchr(s,'a');
}
printf(''%s'', s);|cout<<s;
```

4. Un arbore cu 8 noduri este memorat cu ajutorul vectorului de taţi, t=(2,0,2,3,1,3,3,2). Se cer: rădăcina şi frunzele arborelui. **(6p.)**
5. Se citeşte un şir s cu cel mult 200 de caractere (litere mici ale alfabetului englez şi spaţiu). Se cere să se construiască în memorie și să se afișeze un nou șir obținut din s prin transformarea cuvintelor de lungime impară în cuvinte de lungime pară dublând litera din mijloc. **(10p.)**
   Exemplu:

   Dacă şirul *s* citit este: **ana are mere si caise** se va afişa: **anna arre mere si caiise**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră mulţimea **{2, 3, 4, 5, 6}**. Se cere să se determine numărul de soluţii pentru scrierea tuturor numerelor de **3** cifre distincte din mulțimea dată, cu cifre în ordine strict crescătoare. **(4p.)**

a) 60 b) 10 c) 6 d) 12

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

2. Subprogramul f are definiţia alăturată. Ce va afişa apelul f(123456)? **(6p.)**

```
void f(int x)
{ if(x>0)
    {   if(x%10%2==0) cout<<x%10;| printf(''%d '',x%10);
        f(x/10);
        if(x%10%2==1) cout<<x%10;| printf(''%d '',x%10);
    }
}
```

3. a) Subprogramul **determin** primește prin intermediul parametrului a un număr natural cu cel mult 10 cifre și întoarce prin intermediul parametrului nr numărul de cifre distincte din a. Să se scrie definiția completă a subprogramului determin. **(4p.)**
   Exemplu: dacă numărul a este **2522354** subprogramul trebuie să returneze **4**.
   b) Scrieţi un program C/C++ prin care citind n numere şi utilizând apeluri utile ale subprogramului **determin**, calculează și afișează câte dintre numerele citite au număr maxim de cifre distincte. **(6p.)**
   Exemplu: $n = 7$ şi numerele **223 111 56598 4567 8 552324 456** se va afişa **3**.
4. Fişierul **bac.txt** conţine pe prima linie un număr natural n ($1 < n < 100000$), iar pe a doua linie n numere naturale cuprinse între 1 şi 2000000. Să se determine, într-un mod eficient din punct de vedere al memoriei utilizate, numărul de zerouri în care se termină produsul celor n numere.
   a) Descrieţi în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(4p.)**
   b) Scrieţi un program C/C++ pentru rezolvarea problemei. **(6p.)**
   Exemplu: dacă în fişierul **bac.txt** avem:

   5

   10 15 16 18 3

   se va afişa **2**.

Testul 2

Aurelian Răducu [2], *Serenela Răducu* [3]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Ştiind că variabilele a şi b memorează numere naturale, $a \leq b$, indicaţi care dintre expresiile C/C++ următoare indică numărul de numere pare din intervalul $[a, b]$. **(4p.)**

[2] Profesor, Colegiul Național ,,Alexandru Odobescu", Pitești, radu_a_d@yahoo.com
[3] Profesor, Colegiul Național ,,Ion C. Brătianu", Pitești, r_sere_gabi@yahoo.com

a) `(b-a)/2`
b) `(b-a)/2+1`
c) `(b-a)/2-(a%2)*(b%2)`
d) `(b-a)/2+1-(a%2)*(b%2)`

2. Care este numărul subgrafurilor complete ale grafului neorientat cu 5 noduri, numerotate de la 1 la 5, dat de listele de adiacenţă următoare: **(4p.)**

   1: 2;

   2: 1, 3, 4;

   3: 2, 4, 5;

   4: 2, 3, 5;

   5: 3, 4;

   a) 0 b) 2 c) 8 d) 13

3. Pentru arborele cu 10 noduri, numerotate de la 1 la 10, reprezentat prin vectorul de taţi T(0,1,2,3,1,5,5,7,5,9), stabiliţi numărul nodurilor care au exact 3 ascendenţi. **(4p.)**

   a) 0 b) 2 c) 3 d) 4

4. Utilizând metoda backtracking se generează toate submulţimile nevide ale mulţimii 1,2,3,4. Primele submulţimi generate sunt: {1}, {1,2}, {1,2,3}, {1,2,3,4}, {1,2,4}. Care este a 8-a submulţime generată? **(4p.)**

   a) $\{1,3\}$ b) $\{1,3,4\}$ c) $\{1,4\}$ d) $\{2,3,4\}$

5. Se consideră subprogramul **f** cu definiţia următoare: **(4p.)**

```
void f(int n)
{
        if(n!=0)
                if(n%2==0)
                {
                   cout<<n%10;
                   f(n/10);
                   cout<<n%10;
                }
        else
          {
            f(n/10);
            cout<<n%10;
          }
}
```

   Ce se afişează în urma apelului f(12345) ?

   a) 2454321 b) 2412345 c) 422345 d) 4212345

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul de mai jos, scris în pseudocod.

   S-a notat cu $x\%y$ restul împărţirii numărului întreg x la numărul întreg y şi cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.

```
citeste a,b (numere naturale)
p←1
cat timp(a*b>0 si a%10=b%10) executa
|   a←[a/10]
|   b←[b/10]
|_  p←p*10
a←a*p
scrie a
```

a) Ce valoare se afişează dacă se citesc valorile 12345 şi 145 ? **(6p.)**

b) Dacă pentru *b* se citeşte valoarea 89, scrieţi care este numărul numerelor cu patru cifre distincte, ce pot fi citite pentru variabila *a*, astfel încât valoarea afişată să fie divizibilă cu 50? **(6p.)**

c) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat care să conţină, în locul structurii cât timp...execută, o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**

d) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. În declararea următoare, câmpurile `x` şi `y` ale înregistrării pot memora numere naturale ce reprezintă, în ordine, extremitatea iniţială, respectiv extremitatea finală a unui graf orientat. Scrieţi o expresie C/C++ care să aibă valoarea 1 dacă şi numai dacă arcele distincte `a1` şi `a2` sunt incidente. **(6p.)**

```
typedef struct
        {
          int x,y;
        } arc;
arc a1,a2;
```

3. În secvenţa următoare, variabilele `i`, `j` şi `x` sunt de tip int, iar variabila `M` memorează o matrice cu 5 linii şi 5 coloane numerotate de la 1 la 5, cu elemente întregi. Scrieţi care este cea mai mare valoare memorată în matrice şi care sunt coordonatele elementului din matrice (linia şi coloana) ce memorează această valoare, la finalul executării secvenţei. **(6p.)**

```
x=0;
for(i=1;i<=5;i++)
  for(j=1;j<=5;j++)
     {
        if(i%2!=j%2) x=x+2;
        else x--;
        M[i][j]=x;
     }
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Un şir cu maximum 255 de caractere conţine cuvinte scrise cu litere mici. Două cuvinte alăturate sunt separate printr-un singur spaţiu. Scrieţi programul C/C++ care citeşte un astfel de şir şi înlocuieşte fiecare cuvânt ce conţine cel puţin trei litere cu un nou cuvânt, format cu prima şi ultima literă a cuvântului. Şirul obţinut se afişează pe ecran. **(10p.)**
Exemplu: Pentru șirul **am vazut o raza de soare** se afișează **am vt o ra de se**

2. Subprogramul **MinMax** primeşte prin intermediul parametrului n, un număr natural nenul n ($1 \leq n \leq 100$) şi prin intermediul parametrului v, un tablou unidimensional cu maximum 100 de numere reale. Subprogramul mută, la începutul tabloului, toate apariţiile celui mai mic număr din tablou şi, la sfârşitul tabloului, toate apariţiile celui mai mare număr din tablou, fără a modifica ordinea celorlalte elemente din tablou. Scrieţi definiţia completă a subprogramului **MinMax**. **(10p.)**
   Exemplu: Pentru $n = 10$ şi $v = (5, 8, 2, 9, 2, 7, 9, 4, 2, 8)$, subprogramul **MinMax** va furniza prin parametru v, tabloul: $(2, 2, 2, 5, 8, 7, 4, 8, 9, 9)$.
3. Numim secvenţă liniară o secvenţă de numere întregi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ cu proprietatea că $a_{i+1} - a_i = i$ pentru $1 \leq i \leq n-1$. Fişierul **numere.in** conţine un şir de cel mult 1000000 numere naturale cu cel mult patru cifre.

   a) Scrieţi programul C/C++ care citeşte şirul de numere din fişier, determină şi afişează pe ecran, utilizând un algoritm eficient din punct de vedere al timpului de executare şi al spaţiului de memorie utilizat, cea mai lungă secvenţă liniară din şir. Elementele secvenţei liniare se afişează separate prin spaţiu. Dacă există mai multe secvenţe liniare de lungime maximă, se afişează una dintre ele. **(8p.)**
   Exemplu: Dacă fişierul conţine, în ordine, numerele 4 6 **8 9 11 14** 5 7 **9 10 12 15 19** 4 2 secvenţa liniară, atunci se afişează pe ecran secvenţa liniară: **9 10 12 15 19**
   b) Descrieţi în limbaj natural metoda utilizată şi explicat în ce constă eficienţa ei. **(2p.)**

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Costel Bălcău [1]

1. Spunem că două numere naturale nenule sunt *3DC-prietene* dacă ele au exact trei divizori naturali comuni. Fie n un număr natural nenul. Elaborați un program C++ care să determine:

   a) dacă n are sau nu numere 3DC-prietene;
   b) cele mai mici două numere naturale nenule a și b ce sunt 3DC-prietene cu n, presupunând că răspunsul la punctul a) este afirmativ.

   Exemple. Pentru $n = 10$ răspunsul la punctul a) este NU. Pentru $n = 36$ răspunsul la punctul a) este DA, iar răspunsul la punctul b) este $a = 4$, $b = 8$. Pentru $n = 72$ răspunsul la punctul a) este DA, iar răspunsul la punctul b) este $a = 4$, $b = 9$.

2. Se consideră o matrice $(A[i][j])_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ cu elemente distincte două câte două. Un *drum coborâtor* în matricea A este un drum ce parcurge unul sau mai multe elemente ale matricei doar coborând de fiecare dată pe verticală sau pe diagonală de la un element la un element de pe linia următoare. Elaborați un program C++ care, pentru $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ și $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dați, să determine:

   a) numărul de elemente ale matricei A pentru care există drumuri coborâtoare de la aceste elemente la elementul $A[i][j]$;
   b) numărul total de drumuri coborâtoare în matricea A ce se încheie cu elementul $A[i][j]$.

Testul 2

Doru-Anastasiu Popescu [2]

1. Se dau n fracții a_i/b_i, $1 \leq i \leq n$, prin perechi de forma (a_i, b_i) de numere naturale cu maxim 9 cifre. Elaborați un program Pascal/C/C++ care să determine:

   a) fracția cea mai mică, în formă ireductibilă;
   b) suma fracțiilor, în formă ireductibilă.

   Exemplu. Pentru $n = 3$ și perechile $(4, 8)$, $(2, 3)$, $(10, 30)$ răspunsul la punctul a) este 1/3, iar răspunsul la punctul b) este 3/2.

2. Se dau n numere naturale x_1, x_2, ..., x_n, unde $1 < n < 21$ și $0 < x_i < 11$, pentru orice $1 \leq i \leq n$. Elaborați un program Pascal/C/C++ care să determine:

   a) suma $\text{comb}(x_1, 2) + \text{comb}(x_2, 2) + \ldots + \text{comb}(x_n, 2)$, unde $\text{comb}(a, b)$ reprezintă numărul de combinări cu b elemente luate dintr-o mulțime cu a elemente;

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com
[2] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

b) cel mai mic număr natural nenul care **nu** se poate obține ca sumă de elemente de pe poziții distincte din șirul de numere x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Exemplu. Pentru $n = 3$ și numerele 1, 5, 2, răspunsul la punctul a) este 11 $(0 + 10 + 1)$, iar răspunsul la punctul b) este 4 $(1 = 1,\ 2 = 2,\ 3 = 1 + 2$, iar 4 nu se poate scrie ca sumă de numere din șirul 1, 5, 2).

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Doru Anastasiu Popescu [1]

1. Se consideră următoarea secvență de cod:

```
int a,b,c,d;
a=20, b=6, c=5;
d=a/b/c+b*a/c;
cout<<d;
```

Care dintre următoarele variante este rezultatul afișat după executarea acestei secvențe de cod?

a) 7.2 b) 44 c) 0 d) 24

2. Se consideră secvența de instrucțiuni în pseudocod:

```
citeste x (numar natural)
S←0
cat timp  x>5  executa
|   S←S+x%10
|_  x←[x/10]
scrie S
```

S-a notat cu $a\%b$ restul împărțirii lui a la b, iar cu $[a/b]$ câtul împărțirii lui a la b.

Ce se va afișa, dacă se citește numărul 4531?

a) 13 b) 9 c) 8 d) 4

3. Se consideră secvenţa de instrucţiuni în pseudocod:

```
s←0
pentru  i=8,N  executa
|_  s←s+i*10
scrie s
```

Pentru ce valoare a lui N se va afişa 270?

a) 12 b) 9 c) 11 d) 10

4. Se consideră secvenţa de instrucţiuni în pseudocod:

```
citeste n (numar natural)
r←1
cat timp n≠0 executa
|   cat timp n>9 executa
|   |_  n←[n/10]
|   r←r*n
|_  citeste n
scrie r
```

Ce se va afişa, pentru şirul de numere 4021 560912 123234 901 123 0 ?

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, doru.popescu@upit.ro

a) 20 b) 0 c) 180 d) 24

5. Se consideră programul:

Varianta Pascal

```
var i,j:integer;
a:array[1..6,1..6]of integer;
begin
 for i:=1 to 6 do
  for j:=1 to 6 do
   a[i,j]:=0;
 for i:=2 to 6 do
  for j:=2 to 6 do
   a[i,j]:=i*j mod 6;
 for i:=1 to 3 do
  begin
   for j:=1 to 3 do
    write(a[i,j]);
   writeln;
  end;
end.
```

Varianta C/C++

```
#include <iostream.h>
using namespace std;
int main(){
int i,j,a[7][7];
for(i=1;i<7;i++)
 for(j=1;j<7;j++)
  a[i][j]=0;
for(i=2;i<7;i++)
 for(j=2;j<7;j++)
  a[i][j]=i*j%6;
for(i=1;i<4;i++){
 for(j=1;j<4;j++)
  cout<<a[i][j];
 cout<<endl;
 }
return 0;
}
```

După executare, se va afişa:

a) 123
240
303

b) 000
240
003

c) 000
040
003

d) 000
240
303

6. Se consideră:

Varianta Pascal

```
function ex(k:longint):integer;
begin
 if k=0 then
  ex:=1
 else
  if k mod 10<>0 then
   ex:=ex(k div 10)*(k mod 10)
  else
   ex:=ex(k div 10);
end;
```

Varianta C/C++

```
int ex(long k){
if (k==0)
 return 1;
  else
 if(k%10!=0)
  return ex(k/10)*(k%10);
   else
  return ex(k/10);
}
```

Care este valoarea expresiei: $ex(192) + ex(2019)$?

a) 7 b) 24 c) 36 d) 18

7. Se consideră un arbore cu 11 noduri, rădăcina în nodul 2 şi muchiile $[2,3]$, $[3,1]$, $[3,4]$, $[4,7]$, $[4,6]$, $[1,5]$, $[1,9]$, $[1,10]$, $[7,8]$, $[2,11]$. Care din vectorii următori este vector tată?

a) T=(3, 0, 2, 0, 1, 4, 4, 7, 1, 1, 2)
b) T=(3, 0, 2, 3, 1, 4, 4, 7, 1, 1, 2)
c) T=(3, 0, 2, 3, 1, 4, 4, 1, 1, 1, 2)
d) T=(3, 3, 0, 3, 1, 4, 4, 7, 1, 1, 2)

8. Câte frunze (noduri terminale) are arborele de la problema 7?

a) 0 b) 7 c) 5 d) 6

9. Dacă se elimină nodul 3 şi muchiile ce au o extremitate în 3, câte componente conexe va avea graful de la problema 7 ?

a) 3 b) 1 c) 2 d) 4

10. Se consideră graful orientat cu nodurile $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ şi arcele $(2, 6)$, $(1, 5)$, $(4, 7)$, $(6, 2)$, $(5, 3)$, $(3, 7)$, $(5, 4)$, $(1, 7)$, $(6, 1)$. Se cere să se determine gradul exterior al nodului 6.

a) 1 b) 2 c) 0 d) 3

11. Câte circuite are graful de la problema 10?

a) 2 b) 1 c) 3 d) 0

12. Pentru graful de la problema 10, cu cât este egală suma componentelor matricei de adiacenţă?

a) 7 b) 14 c) 9 d) 18

13. Se dă un graf neorientat cu 100 de noduri şi muchiile $[50, 70], [80, 79]$. Câte muchii trebuie adăugate pentru a se obţine un arbore?

a) 96 b) 97 c) 95 d) 198

14. Utilizând metoda bactracking se generează în ordine lexicografică toate şirurile de patru litere distincte din mulţimea {U, P, I, T}. Primele trei soluţii generate sunt, în această ordine: IPTU, IPUT, ITPU. Scrieţi cea de a patra şi cea de a cincea soluţie, în ordinea generării acestora.

a) ITUP, IUPT b) ITUP, IUTP c) IUPT, IUTP d) IUTP, IUTT

15. Utilizând metoda backtracking se generează în ordine lexicografică toate şirurile de patru litere din mulţimea {U, P, I, T}. Câte șiruri se vor genera?

a) 255 b) 24 c) 16 d) 256

Testul 2

Cristina Tudose [2]

1. Se consideră următoarea secvență de cod:

```
int n;
cin>>n;
cout<<n/10%100;
```

Care dintre următoarele variante este rezultatul afișat după executarea acestei secvențe de cod pentru $n = 53478$?

a) 34 b) 47 c) 53 d) 8

2. Se folosește metoda backtracking pentru a genera toate numerele de trei cifre care au toate cifrele impare și ordonate crescător. Primele numere generate sunt: $111, 113, 115, 117, 119, 133, 135$. Câte numere care încep cu cifra 5 se generează?

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, cristina.tudose21@gmail.com

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

3. Se folosește metoda backtracking pentru a genera toate numerele de trei cifre care au toate cifrele impare și ordonate crescător. Primele numere generate sunt, în ordine: $111, 113, 115, 117, 119$, $133, 135$. Care va fi cel de-al zecelea număr generat?

a) 139 b) 151 c) 155 d) 157

4. În urma secvenței de cod:

```
int a=12, b=7, *p,*q;
p=&a, q=&b;
a++;
p=q;
(*p)++;
cout<<*p<<" "<<*q<<" "<<a<<" "<<b;
```

se tipărește:

a) 12 12 12 12 b) 8 7 13 7 c) 8 8 13 8 d) 7 8 13 8

5. Se consideră următoarea secvență de cod:

```
int n,m=0,c;
cin>>n;
while(n!=0)
{
  c=n%10;
  n/=10;
  if(c%2==0) continue;
  m=m*10+c;
}
cout<<m;
```

Care este valoarea salvată în variabila m pentru $n = 17683$?

a) 86 b) 371 c) 38671 d) 78

6. Fie funcția:

```
int f(int n)
{
   if(n==0) return 1;
   if(n%2==0) return f(n-1)+n/2;
   return f(n-1)+1;
}
```

Ce va returna apelul $f(5)$?

a) 6 b) 7 c) 5 d) 8

7. Pentru funcția de la punctul anterior, precizați numărul de auto-apeluri pentru apelul $f(5)$.

a) 6 b) 7 c) 5 d) 8

8. Fie secvența de cod:

```
int i,j,a[4][4],s=0;
for(i=0; i<4; i++)
for(j=0; j<4; j++)
{
```

```
        a[i][j]=(i==j) ? 0 :  i | j;
        s+=a[i][j];
    }
    cout<<s;
```

Se va afișa:

a) 30 b) 36 c) 18 d) 0

9. Fie matricea:

```
int a[][3]={{11,22,33},{44,55,66},{77,88,99}};
```

Elementul aflat la intersecția dintre linia a doua și coloana a treia este:

a) *(*(a+2)+3) b) **(a+1)+2 c) *(*(a+1)+2) d) *(a+1)+2

10. Se consideră graful neorientat cu nodurile $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ şi muchiile $(1, 2), (3, 4), (3, 5), (6, 7)$. Care este numărul minim de muchii care trebuie adăugate astfel încât graful să devină conex?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

11. Pentru graful de la problema 10, câte muchii trebuie adăugate astfel încât graful să devină complet?

a) 2 b) 17 c) 16 d) 18

12. Dacă G este un graf orientat cu 2019 noduri, toate având gradele interne nenule, atunci:

a) toate gradele externe sunt nenule;
b) G este tare-conex;
c) G are un număr par de componente tare-conexe;
d) G conține cel puțin un circuit.

13. Fie G un graf neorientat cu 21 de noduri și 208 muchii. Atunci:

a) G este și eulerian și hamiltonian;
b) G este eulerian, dar nu este hamiltonian;
c) G este hamiltonian, dar nu este eulerian;
d) G nu este nici eulerian, nici hamiltonian.

14. Un arbore are n noduri, dintre care 10 au gradele egale cu 1 iar celelalte au gradele egale cu 3. Atunci:

a) nu există un astfel de arbore;
b) $n = 18$;
c) $n = 20$;
d) $n = 22$.

15. Se consideră o stivă şi o coadă inițial vide. Se introduc pe rând în coadă toate numerele formate din două cifre identice, în ordine crescătoare. Se extrag apoi din coadă patru elemente și se adaugă în stivă, în ordinea în care au fost extrase. Se extrage un element din stivă. Care va fi acesta?

a) 55 b) 33 c) 44 d) 66

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 1

Clasa a IX-a

M 21. *Demonstrați că pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *și* $x \geq 0$ *are loc inegalitatea*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2+x)^k}{2+kx} \geq 2^n - 1.$$

Când are loc egalitatea?

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție. Pentru orice $a > 0$, $x \geq 0$ și $k \in \mathbb{N}^*$, utilizând *Inegalitatea lui Bernoulli* avem $(a+x)^k \geq a^{k-1}(a+kx)$, cu egalitate dacă și numai dacă $k=1$ sau $x=0$. Prin urmare $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(a+x)^k}{a+kx} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} a^{k-1} = \frac{a^n-1}{a-1}$, pentru $a \neq 1$. Pentru $a=2$ obținem inegalitatea din enunț. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $n=1$ sau $x=0$.

M 22. *Demonstrați identitatea*

$$\left[\sum_{k=n}^{2n-1} \left\{\sqrt{k(k+1)}\right\}\right] = \left[\frac{n-1}{2}\right], \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $[x]$ *și* $\{x\}$ *reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real* x.

Nicolae Stăniloiu, Bocșa

Soluție. Fie $S = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \left\{\sqrt{k(k+1)}\right\}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $\left[\sqrt{k(k+1)}\right] = k$, deoarece $k \leq \sqrt{k(k+1)} < k+1$. Rezultă că $S = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \left(\sqrt{k(k+1)} - k\right)$. Conform *Inegalității mediilor* avem $\frac{2k(k+1)}{2k+1} < \sqrt{k(k+1)} < \frac{2k+1}{2}$, deci $\frac{k}{2k+1} < \sqrt{k(k+1)} - k < \frac{1}{2}$, pentru orice $k = \overline{n, 2n-1}$. Funcția $f(k) = \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$ este strict crescătoare pe $\mathbb{N}$, deci $f(k) > f(n-1)$ și astfel $\frac{n-1}{2n-1} < \sqrt{k(k+1)} - k < \frac{1}{2}$, pentru orice $k = \overline{n, 2n-1}$. Prin adunare obținem $\frac{n(n-1)}{2n-1} < S < \frac{n}{2}$. Cum $\frac{n(n-1)}{2n-1} \geq \frac{n-1}{2} \geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ și $\frac{n}{2} \leq \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1$, rezultă că $\left[\frac{n-1}{2}\right] < S < \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1$, deci $[S] = \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

M 23. *Rezolvați în* $(0, \infty)^6$ *sistemul*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 = 3 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 9 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = 1 \end{cases}.$$

Leonard Giugiuc și *Diana Trăilescu*, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Avem $a_4 + a_5 + a_6 = a_1 + a_2 + a_3 - 3$ și $a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 9 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$. Cum $(a_4 + a_5 + a_6)^2 \le 3\,(a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)$, obținem $(a_1 + a_2 + a_3 - 3)^2 \le 27 - 3\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$, adică $3\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (a_1 + a_2 + a_3 - 3)^2 \le 27$. Dar $(a_1 + a_2 + a_3)^2 \le 3\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$, deci $(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (a_1 + a_2 + a_3 - 3)^2 \le 27$. Notând $a_1 + a_2 + a_3 = 3s$ obținem că $s^2 - s - 1 \le 0$, deci $s \le \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$. Utilizând *Inegalitatea mediilor*, din $a_1 + a_2 + a_3 = 3s$ rezultă că $a_1a_2a_3 \le s^3 \le \varphi^3$, iar din $a_4 + a_5 + a_6 = a_1 + a_2 + a_3 - 3 \le 3(\varphi - 1) = \dfrac{3}{\varphi}$ rezultă că $a_4a_5a_6 \le \dfrac{1}{\varphi^3}$. Deci $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \le \varphi^3 \cdot \dfrac{1}{\varphi^3} = 1$. Din demonstrația de mai sus deducem că $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 = 1$ dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = a_3 = \varphi$ și $a_4 = a_5 = a_6 = \dfrac{1}{\varphi}$.

M 24. *Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:*

a) $(4\cos^2 x - 3)(4\cos^2 3x - 3) = 2\sin x$*;*

b) $\dfrac{\cos^3 x + \cos^3 5x + \cos^3 9x + \cos^3 13x}{\cos x + \cos 5x + \cos 9x + \cos 13x} = \dfrac{3}{4}$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ și $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nu sunt soluții ale ecuației date. Utilizând formula $4\cos^2 x - 3 = \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$, pentru $\cos x \ne 0$, ecuația devine $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos 9x}{\cos 3x} = 2\sin x$, cu $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ și $x \ne \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Aceasta devine succesiv: $\cos 9x = \sin 2x$; $\cos 9x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$; $9x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, deci $x = \dfrac{(4k+1)\pi}{22}$ sau $x = \dfrac{(4k-1)\pi}{14}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{(4k+1)\pi}{22}$ este soluție $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(4k+1)\pi}{22} \ne \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ și $\dfrac{(4k+1)\pi}{22} \ne \dfrac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $4k + 1 \ne 11 + 22n$ și $4k + 1 \ne \dfrac{11}{3} + 22n$ (adev.) $\Leftrightarrow k \ne \dfrac{11n+5}{2}$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \ne \dfrac{11(2m+1)+5}{2}$, $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \ne 11m + 8$, $m \in \mathbb{Z}$.

Analog, $x = \dfrac{(4k-1)\pi}{14}$ este soluție dacă și numai dacă $k \ne 7m + 2$, $m \in \mathbb{Z}$.

b) Condiția de existență: $\cos x + \cos 5x + \cos 9x + \cos 13x \ne 0 \Leftrightarrow 2\cos 7x(\cos 6x + \cos 2x) \ne 0$ $\Leftrightarrow 4\cos 7x\cos 4x\cos 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{(2k+1)\pi}{4}$, $x \ne \dfrac{(2k+1)\pi}{8}$ și $x \ne \dfrac{(2k+1)\pi}{14}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cum $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$, ecuația devine $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\cos 3x + \cos 15x + \cos 27x + \cos 39x}{4(\cos x + \cos 5x + \cos 9x + \cos 13x)} = \dfrac{3}{4}$, adică $\cos 3x + \cos 15x + \cos 27x + \cos 39x = 0$. Notând $3x = y$, conform rezolvării condiției de existență obținem că $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{12}$, $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{24}$ sau $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{42}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{(2k+1)\pi}{12}$ este soluție $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(2k+1)\pi}{12} \ne \dfrac{(2n+1)\pi}{4}$, $\dfrac{(2k+1)\pi}{12} \ne \dfrac{(2n+1)\pi}{8}$ și $\dfrac{(2k+1)\pi}{12} \ne \dfrac{(2n+1)\pi}{14}$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2k + 1 \ne 3(2n+1)$, $2(2k+1) \ne 3(2n+1)$ (adev.) și $7(2k+1) \ne 6(2n+1)$ (adev.) $\Leftrightarrow k \ne 3n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Analog, $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{24}$ și $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{42}$ sunt soluții dacă și numai dacă $k \ne 3n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

M 25. *Fie ABC un triunghi având toate unghiurile mai mici decât $\frac{2\pi}{3}$ și fie T punctul Torricelli-Fermat al acestuia. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BTC$, $\sphericalangle CTA$ și $\sphericalangle ATB$ intersectează laturile $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$ în punctele D, E și respectiv F. Arătați că $AB+BC+CA \geq 2(DE+EF+FD)$.*

Leonard Giugiuc, România, *Kadir Altintas*, Turcia
și *Miguel Ochoa Sanchez*, Peru

Soluție. Punctul T are proprietatea că $m(\sphericalangle BTC) = m(\sphericalangle CTA) = m(\sphericalangle ATB) = 120°$. Notăm $TA = x$, $TB = y$ și $TC = z$. Conform *Teoremei cosinusului* avem $AB = \sqrt{x^2+xy+y^2}$ și $AC = \sqrt{z^2+xz+x^2}$, deci utilizând *Inegalitatea mediilor* și *Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz* rezultă că $AB+AC \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+xy+y^2}\cdot\sqrt{z^2+xz+x^2}} \geq 2\sqrt{xz+x\sqrt{yz}+yx}$, (1). TF fiind bisectoare în $\triangle ATB$, avem $TF = \dfrac{2xy}{x+y}\cdot\cos 60° = \dfrac{xy}{x+y}$. Analog, $TE = \dfrac{xz}{x+z}$. Aplicând *Teorema cosinusului* în $\triangle ETF$ avem $EF = \sqrt{\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2 + \dfrac{xy}{x+y}\cdot\dfrac{xz}{x+z} + \left(\dfrac{xz}{x+z}\right)^2}$, deci utilizând *Inegalitatea mediilor* (dintre media armonică și cea geometrică) rezultă că $EF \leq \sqrt{\dfrac{xy}{4} + \dfrac{\sqrt{xy}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{xz}}{2} + \dfrac{xz}{4}} = \dfrac{\sqrt{xz+x\sqrt{yz}+yx}}{2}$, (2). Din (1) și (2) deducem că $AB+AC \geq 4EF$. Analog, $AB+BC \geq 4DF$ și $AC+BC \geq 4DE$, iar prin adunare obținem inegalitatea din enunț.

Clasa a X-a

M 26. *a) Determinați funcția strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisface condiția*

$$2f(x) + f(f(x)) = 3x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$3\left(x^{\log_5 6} - 1\right) = 2x + (x+1)^{\log_6 5}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. a) Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat. Dacă $f(x) < x$, atunci $f(f(x)) < f(x) < x$, deci $2f(x) + f(f(x)) < 3x$, fals. Analog, dacă $f(x) > x$, atunci $2f(x)+f(f(x)) > 3x$, fals. Deci $f(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcție ce verifică relația dată.

b) Notând $x^{\log_5 6} - 1 = t$ avem $x = f(t)$, unde $f(t) = (1+t)^{\log_6 5} = 5^{\log_6(1+t)}$, $x > 0$, $t > -1$. Ecuația din enunț devine $2f(t) + f(f(t)) = 3t$, deci $t > 0$ și conform punctului a) rezultă că $f(t) = t$, adică $5^{\log_6(1+t)} = t$. Notând $u = \log_6(1+t) = \log_5 t$, rezultă că $t = 6^u - 1 = 5^u$, deci $\left(\frac{1}{6}\right)^u + \left(\frac{5}{6}\right)^u = 1$, cu soluția unică $u = 1$ (funcția din membrul stâng fiind strict descrescătoare). Rezultă că $t = 5$, de unde $x = 5$, care verifică ecuația din enunț.

M 27. *Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul*

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y} + 2^x = y - \sqrt[3]{x} + 2^y \\ 2^{2x} - (9-y)\cdot 2^x + 8 + 6x - 2y^2 = 0 \end{cases}.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

Soluție. Prima ecuație poate fi rescrisă sub forma $f(x) = f(y)$, unde $f(u) = u+\sqrt[3]{u}+2^u$, pentru orice $u \in \mathbb{R}$. Funcția f este strict crescătoare (ca sumă de trei funcții strict crescătoare), deci $x = y$. Înlocuind $y = x$ și notând $2^x = t$, cea de-a doua ecuație devine $t^2-(9-x)t-2x^2+6x+8 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 8 - 2x$ și $t_2 = x + 1$. Pentru $t = 8 - 2x$ obținem ecuația $2^x = 8 - 2x$, cu soluția unică $x_1 = 2$ (funcția din membrul stâng fiind strict crescătoare, iar cea din membrul drept strict descrescătoare). Pentru $t = x + 1$ obținem ecuația $2^x = x + 1$, care are doar soluțiile $x_2 = 0$ și $x_3 = 1$ (funcția din membrul stâng fiind strict convexă, iar cea din membrul drept concavă, chiar liniară). În concluzie, sistemul dat are soluțiile $(0, 0)$, $(1, 1)$ și $(2, 2)$.

M 28. *Fie* $r_n = \sqrt{n\sqrt{(n-1)\sqrt{(n-2)\ldots\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{1}}}}}}$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$. *Arătați că:*

a) $r_n \leq \left(\dfrac{(n-1)2^n+1}{2^n-1}\right)^{1-\frac{1}{2^n}}$.

b) $\dfrac{n}{r_n} \in [1, \sqrt{n}\,]$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție. a) Rescriind r_n și utilizând *Inegalitatea mediilor* avem

$$\begin{aligned} r_n &= \left\{\left[n^{2^{n-1}} \cdot (n-1)^{2^{n-2}} \cdot (n-2)^{2^{n-3}} \cdot \ldots \cdot 3^{2^2} \cdot 2^{2^1} \cdot 1^{2^0}\right]^{\frac{1}{2^n-1}}\right\}^{\frac{2^n-1}{2^n}} \\ &\leq \left[\frac{2^{n-1}\cdot n + 2^{n-2}\cdot(n-1) + 2^{n-3}\cdot(n-2) + \ldots + 2^2\cdot 3 + 2^1\cdot 2 + 2^0\cdot 1}{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+2^2+2^1+2^0}\right]^{\frac{2^n-1}{2^n}} \\ &= \left(\frac{(n-1)2^n+1}{2^n-1}\right)^{1-\frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

b) Utilizând a) avem $r_n \leq \dfrac{(n-1)2^n+1}{2^n-1} = n - 1 + \dfrac{n}{2^n-1}$. Cum $2^n \geq n + 1$, rezultă că $r_n \leq n$. Evident, avem și $r_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sqrt{(n-1)\sqrt{(n-2)\ldots\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{1}}}}}} \geq \sqrt{n}$.

M 29. *Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$ și fie D mijlocul laturii BC. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile BAM și CAN astfel încât $AM = AB$, $AN = AC$ și $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle CAN) = \alpha$. Demonstrați că $AD \perp MN$ dacă și numai dacă $\alpha = 90°$.*

Nicolae Stăniloiu, Bocșa

Soluție. Considerând planul complex cu originea în A și că punctele A, B, C sunt numerotate în ordine trigonometrică, avem $z_D = \dfrac{z_B + z_C}{2}$, $z_N = z_C \cdot \omega$ și $z_M = z_B \cdot \overline{\omega}$, unde $\omega = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Astfel obținem echivalențele: $AD \perp MN \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{z_M - z_N}{z_D}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\dfrac{z_B\cdot\overline{\omega} - z_C\cdot\omega}{z_B+z_C}\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{z_B\cdot\overline{\omega} - z_C\cdot\omega}{z_B+z_C}\right)} = -\dfrac{z_B\cdot\overline{\omega} - z_C\cdot\omega}{z_B+z_C} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z_B}\cdot\omega - \overline{z_C}\cdot\overline{\omega}}{\overline{z_B}+\overline{z_C}} = -\dfrac{z_B\cdot\overline{\omega} - z_C\cdot\omega}{z_B+z_C} \Leftrightarrow \omega\left(|z_B|^2 - |z_C|^2\right) + \overline{\omega}\left(|z_B|^2 - |z_C|^2\right) = 0 \Leftrightarrow \omega + \overline{\omega} = 0$ (deoarece $AB \neq AC$) $\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90°$.

M 30. *Fie ABC un triunghi nedreptunghic, O centrul cercului circumscris acestuia, iar D, E și F mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ și respectiv $[AB]$. Fie $DO \cap AC = \{X\}$, $EO \cap AB = \{Y\}$ și $FO \cap BC = \{Z\}$. Arătați că*

$$\frac{AX}{XC} \cdot \frac{BY}{YA} \cdot \frac{CZ}{ZB} = \left|\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\right|$$

(notațiile fiind cele obișnuite).

Van Khea, Cambodgia și *Leonard Giugiuc*, România

Soluția 1. Considerăm planul complex cu originea în O și că cercul circumscris are raza 1, deci avem $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$. Notăm $\frac{\overline{AX}}{\overline{XC}} = \beta$, deci $z_X = \frac{z_A + \beta z_C}{1+\beta}$. D, O, X coliniare $\Rightarrow \frac{z_X - z_O}{z_D - z_O} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{z_A + \beta z_C}{z_B + z_C} \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_A+\beta z_C}{z_B+z_C}\right)} = \frac{z_A+\beta z_C}{z_B+z_C} \Rightarrow \frac{\frac{1}{z_A}+\frac{\beta}{z_C}}{\frac{1}{z_B}+\frac{1}{z_C}} = \frac{z_A+\beta z_C}{z_B+z_C}$ $\Rightarrow \beta = \frac{z_A^2 - z_B z_C}{z_A(z_B - x_C)}$. Dar $a^2 = |z_B - z_C|^2 = (z_B - z_C)\overline{(z_B - z_C)} = (z_B - z_C)\left(\frac{1}{z_B} - \frac{1}{z_C}\right) = -\frac{(z_B - z_C)^2}{z_B z_C}$ și, analog, $b^2 - c^2 = -\frac{(z_A - z_C)^2}{z_A z_C} + \frac{(z_A - z_B)^2}{z_A z_B} = -\frac{(z_B - z_C)(z_A^2 - z_B z_C)}{z_A z_B z_C}$. Rezultă că $\beta = \frac{b^2 - c^2}{a^2}$, deci $\frac{AX}{XC} = \left|\frac{b^2-c^2}{a^2}\right|$. Analog, $\frac{BY}{YA} = \left|\frac{c^2-a^2}{b^2}\right|$ și $\frac{CZ}{ZB} = \left|\frac{a^2-b^2}{c^2}\right|$, iar prin înmulțire obținem egalitatea din enunț.

Soluția 2. Din triunghiul dreptunghic CDX avem $XC = \frac{a}{2|\cos C|}$, deci utilizând *Teorema cosinusului* avem $XC = \frac{a^2 b}{|a^2+b^2-c^2|}$. Rezultă că $AX = \left|b - \frac{a^2 b}{a^2+b^2-c^2}\right| = \left|\frac{b(b^2-c^2)}{a^2+b^2-c^2}\right|$, deci $\frac{AX}{XC} = \frac{|b^2-c^2|}{a^2}$. Concluzia este imediată.

Clasa a XI-a

M 31. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = 2AB - BA$. Demonstrați că*

$$\det(AB - BA) = 0.$$

(În legătură cu problema XI.459, R.M.T. nr. 2/2017, punctul a).)

Daniel Jinga, Pitești

Soluție (*Leonard Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Avem $A(I_n - B) = AB - BA$ și $(I_n - B)A = 2(AB - BA)$, deci notând $I_n - B = C$ obținem $CA = 2AC$. Rezultă că $\det(AC) = 2^n \det(AC)$, deci $\det(AC) = 0$, adică $\det(AB - BA) = 0$. Menționăm că pentru $n = 3$ se obține problema XI.459, R.M.T. nr. 2/2017, punctul a).

M 32. *Arătați că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ au loc următoarele inegalități:*

a) $\det(A^2 + B^2 - BA) \geq \det(AB - BA)$;

b) $\det\left((A - B)(A + B) - 2(A^2 + B^2)\right) \geq 4\det(AB - BA)$.

Florin Stănescu, Găești

Soluție (*Leonard Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). a) Fie $u = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, deci $\overline{u} = u^2 = -1 - u$ și $u^3 = 1$. Avem $\det\left((A + \overline{u}B)(A + uB)\right) \in [0, \infty)$, adică $\det\left(A^2 + B^2 - BA + u(AB - BA)\right) \in [0, \infty)$. Fie $A^2 + B^2 - BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $AB - BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, ambele matrice fiind din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Obținem $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = ad - bc + u^2(xt - yz) + u(at + dx - bz - cy) = ad - bc - (xt - yz) + u(at + dx - bz - cy - xt + yz) \in [0, \infty)$, deci $at + dx - bz - cy - xt + yz = 0$ și $ad - bc \geq xt - yz$, adică $\det(A^2 + B^2 - BA) \geq \det(AB - BA)$. b) Se aplică punctul a) pentru matricele $A' = A + B$ și $B' = A - B$.

M 33. *Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația*

$$1 + 3 \cdot 2^{3x-2} \cdot 15^{x-1} = 8^{3x-2} - 15^{3x-3}.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Notând $a = 1$, $b = -2^{3x-2}$ și $c = 15^{x-1}$, ecuația devine $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$, adică $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0$, deci $a+b+c = 0$ sau $a = b = c$. Cum $a \neq b$, ecuația din enunț este echivalentă cu $1 - 2^{3x-2} + 15^{x-1} = 0$, adică cu $15^{x-1} - 8^{x-1} = 8^{x-1} - 1$, (1). Aplicând *Teorema lui Lagrange* pentru funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^{x-1}$ pe intervalele $[8, 15]$ și $[1, 8]$, rezultă că există $t_1 \in (8, 15)$ și $t_2 \in (1, 8)$ a.î. $f(15) - f(8) = 7f'(t_1)$ și $f(8) - f(1) = 7f'(t_2)$, deci ecuația (1) devine $(x - 1)t_1^{x-2} = (x - 1)t_2^{x-2}$, cu soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.

M 34. *a) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Arătați că există $c_1, c_2 \in (a, b)$ astfel încât $f'(c_1) = \dfrac{f(c_1) - f(a)}{b - c_1}$ și $f'(c_2) = \dfrac{f(b) - f(c_2)}{c_2 - a}$.*

b) Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ există o infinitate de funcții f derivabile pe $[a, b]$ pentru care valorile c_1 și c_2 definite la punctul a) sunt unice și egale.

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție. a) Aplicând *Teorema lui Rolle* pentru funcția $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (b-x)\left(f(x) - f(a)\right)$ rezultă că există $c_1 \in (a, b)$ astfel încât $0 = g'(c_1) = -\left(f(c_1) - f(a)\right) + (b - c_1)f'(c_1)$, adică $f'(c_1) = \dfrac{f(c_1) - f(a)}{b - c_1}$. Analog, aplicând *Teorema lui Rolle* pentru funcția $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = (x - a)\left(f(b) - f(x)\right)$ se obține existența lui c_2 cu proprietatea din enunț.

b) De exemplu, pentru funcțiile de forma $f(x) = mx$ cu $m \neq 0$, se obține că $c_1 = c_2 = \dfrac{a + b}{2}$.

M 35. *Fie $a, b, c, d \in [-1, \infty)$ astfel încât $a + b + c + d = 0$. Arătați că*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 5(abc + abd + acd + bcd) \geq 4abcd.$$

Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc și *Diana Trăilescu*, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Expresiile invocate în inegalitate fiind simetrice, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a \geq b \geq c \geq d$. Rezultă că $a \geq 0 \geq d \geq -1$. Avem trei cazuri.

Cazul 1. $a \geq 0 \geq b \geq c \geq d \geq -1$. Notând $b = -x$, $c = -y$ și $d = -z$ avem $x, y, z \geq 0$, $x + y + z = a$, iar inegalitatea dorită devine $a^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 5[(x + y + z)(xy + xz + yz) - xyz] + 4axyz \geq 0$, inegalitate adevărată deoarece, utilizând *Inegalitatea mediilor*, avem $(x + y + z)(xy + xz + yz) \geq 9xyz \geq xyz$. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow a = x = y = z = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$.

Cazul 2. $a \geq b > 0 \geq c \geq d \geq -1$. Notând $c = -x$ și $d = -y$ avem $x, y \in [0, 1]$, $x + y = a + b = 2s$, cu $s \in (0, 1]$. Notând $ab = p$ și $xy = q$, inegalitatea dorită devine $4s^2 - (p+q) + 5s(q-p) - 2pq \geq 0$, adică $-p(1+5s+2q) + 4s^2 + q(5s-1) \geq 0$. Dar $1+5s+2q > 0$ și $p \leq s^2$, deci $-p(1+5s+2q)+4s^2+q(5s-1) \geq -s^2(1+5s+2q)+4s^2+q(5s-1)$. Astfel este suficient să arătăm că $-s^2(1 + 5s + 2q) + 4s^2 + q(5s - 1) \geq 0$, adică $q(-2s^2 + 5s - 1) + 3s^2 - 5s^3 \geq 0$. Subcazul 2.1. $0 < s \leq \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4}$. Atunci $-2s^2 + 5s - 1 \leq 0$ și cum $q \leq s^2$ rezultă că $q(-2s^2+5s-1)+3s^2-5s^3 \geq s^2(-2s^2+5s-1)+3s^2-5s^3 > 0$. Subcazul 2.2. $\dfrac{5 - \sqrt{17}}{4} < s \leq \dfrac{1}{2}$. Atunci $-2s^2 + 5s - 1 > 0$ și cum $q \geq 0$ rezultă că $q(-2s^2 + 5s - 1) + 3s^2 - 5s^3 \geq 3s^2 - 5s^3 > 0$. Subcazul 2.3. $\dfrac{1}{2} < s \leq 1$. Deoarece $x \in [2s - 1, 1]$, avem $q = x(2s - x) \geq 2s - 1$, cu egalitate $\Leftrightarrow x = 1$, $y = 2s - 1$ sau $x = 2s - 1$, $y = 1$. Cum $-2s^2 + 5s - 1 > 0$ și $q \geq 2s - 1$, rezultă că $q(-2s^2 + 5s - 1) + 3s^2 - 5s^3 \geq (2s - 1)(-2s^2 + 5s - 1) + 3s^2 - 5s^3 = (1 - s)(3s - 1)^2 \geq 0$. Inegalitatea din enunț devine egalitate $\Leftrightarrow s = 1$, $x = y = 1$, $p = s^2 = 1 \Leftrightarrow a = b = 1$, $c = d = -1$.

Cazul 3. $a \geq b \geq c > 0 \geq d \geq -1$. Notând $-d = a + b + c = 3s$, $ab + ac + bc = 3(s^2 - u^2)$ și $abc = p$, unde $0 < s \leq \dfrac{1}{3}$, $0 \leq u \leq s$ și $p > 0$, inegalitatea dorită devine $18s^2 - 3(2 + 15s)(s^2 - u^2) + (5 + 12s)p \geq 0$. Subcazul 3.1. $0 \leq u \leq \dfrac{s}{2}$. Utilizăm *Inegalitatea lui Vo Quoc Ba Can*: $(s + u)^2(s - 2u) \leq p \leq (s - u)^2(s + 2u)$ (se aplică *șirul lui Rolle* pentru polinomul $(x - a)(x - b)(x - c)$ ce are toate rădăcinile reale; Math. Reflections 2/2007, `https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/3variable.pdf`). Cum $5 + 12s > 0$, rezultă că $18s^2 - 3(2 + 15s)(s^2 - u^2) + (5 + 12s)p \geq 18s^2 - 3(2 + 15s)(s^2 - u^2) + (5 + 12s)(s + u)^2(s - 2u)$. Astfel este suficient să arătăm că $18s^2 - 3(2+15s)(s^2 - u^2) + (5+12s)(s+u)^2(s-2u) \geq 0$, adică $-2(5+12s)u^3+6(-6s^2+5s+1)u^2+4s^2(3s^2-10s+3) \geq 0$. Notând expresia din membrul stâng cu $f(u)$, avem $f'(u) = 6u[-(5+12s)u+2(-6s^2+5s+1)] > 0$, deoarece $\dfrac{2(-6s^2 + 5s + 1)}{5 + 12s} > \dfrac{s}{2}$ pentru orice $s \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right]$. Rezultă că $f(u) \geq f(0) = 4s^2(1-3s)(3-s) \geq 0$. Egalitățile au loc $\Leftrightarrow u = 0$, $s = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$, $d = -1$, caz în care și inegalitatea din enunț devine egalitate. Subcazul 3.2. $\dfrac{s}{2} < u \leq s$. Evident, avem $18s^2 - 3(2+15s)(s^2 - u^2) + (5+12s)p \geq 18s^2 - 3(2+15s)(s^2 - u^2)$, deci este suficient să arătăm că $18s^2 - 3(2+15s)(s^2 - u^2) \geq 0$. Funcția $g(u) = 18s^2 - 3(2+15s)(s^2 - u^2)$, $\dfrac{s}{2} \leq u \leq s$ este crescătoare, deci $g(u) \geq g\left(\dfrac{s}{2}\right) = 18s^2 - \dfrac{9}{4} \cdot s^2(2+15s) > 0$ pentru orice $s \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right]$.

Demonstrația inegalității din enunț este completă, iar egalitatea are loc $\Leftrightarrow (a, b, c, d)$ este $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, -1, -1)$, $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -1\right)$ sau permutările lor.

Clasa a XII-a

M 36. *Pentru orice grup G și orice număr natural nenul n notăm*

$$S_n(G) = \{a \in G \mid ax^n a = x,\ \forall\, x \in G\}.$$

a) Pentru $n \geq 2$, demonstrați că dacă $S_n(G) \neq \emptyset$, atunci există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^m = e$, $\forall\, x \in G$ (e reprezintă elementul neutru al lui G). Rămâne adevărată afirmația pentru $n = 1$?

b) Demonstrați echivalența: există un grup G astfel încât $S_n(G) \setminus \{e\} \neq \emptyset$ dacă și numai dacă n este impar.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. a) Fie $a \in S_n(G)$, deci $ax^n a = x$, $\forall\, x \in G$, (1). Luând $x = e$ în (1) obținem că $a^2 = e$. Înmulțind în relația (1) și la stânga și la dreapta cu a rezultă că $x^n = axa$, $\forall\, x \in G$, (2). Avem două cazuri.

1) $n = 2k$, cu $k \in \mathbb{N}^*$. Luând $x = a$ în (2) obținem că $a^{2k} = a^3$, adică $e = a$. Deci $x^{2k} = x$, prin urmare $x^{2k-1} = e$, $\forall\, x \in G$.

2) $n = 2k+1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind x cu xa în (2) obținem că $(xa)^{2k+1} = axaa$, adică $(xaxa)^k x = axa$. Folosind (2) rezultă că $\left(x \cdot x^{2k+1}\right)^k x = x^{2k+1}$, prin urmare $x^{2k^2} = e$, $\forall\, x \in G$.

Concluzia nu rămâne adevărată pentru $n = 1$. De exemplu, pentru grupul multiplicativ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ avem $S_1(\mathbb{R}^*) = \{-1, 1\} \neq \emptyset$, dar nu există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^m = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

b) Dacă G este un grup astfel încât $S_n(G) \setminus \{e\} \neq \emptyset$, atunci conform demonstrației punctului a) rezultă că n este impar. Reciproc, pentru n impar grupul multiplicativ $G = \{-1, 1\}$ are $S_n(G) = \{-1, 1\}$, deci $S_n(G) \setminus \{1\} \neq \emptyset$.

M 37. *Fie s un număr real aparținând intervalului* $(12, 18)$ *și ABC un triunghi astfel încât $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = s$ și $R + r = \sqrt{3}$ ($a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, iar R și r sunt raza cercului circumscris, respectiv raza cercului înscris triunghiului ABC). Exprimați aria triunghiului ABC în funcție de s.*

Leonard Giugiuc, *Cristinel Mortici*, România și *Kadir Altintas*, Turcia

Soluție. Deoarece $b + c > a$ și $a + b + c = 6$ rezultă că $a < 3$. Analog, $b < 3$ și $c < 3$. Notăm $x = 3 - a$, $y = 3 - b$ și $z = 3 - c$. Avem $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ și $xy + xz + yz = \dfrac{18 - s}{2}$. Aplicând *formula lui Heron* obținem că aria $\triangle ABC$ este $S = \sqrt{3q}$, unde $q = xyz$. Fie $t = \sqrt{\dfrac{s - 12}{6}}$. Avem $t \in (0, 1)$ și $xy + xz + yz = 3(1 - t^2)$. Cum $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{(3 - x)(3 - y)(3 - z)}{4S} = \dfrac{9(1 - t^2) - q}{4\sqrt{3q}}$ și $r = \dfrac{2S}{a + b + c} = \dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{3}}$, iar $R + r = \sqrt{3}$, rezultă că $\dfrac{9(1 - t^2) + 3q}{4\sqrt{3q}} = \sqrt{3}$, adică $q - 4\sqrt{q} + 3(1 - t^2) = 0$, deci $\sqrt{q} = 2 \pm \sqrt{1 + 3t^2}$. Dar, folosind *Inegalitatea mediilor*, avem $\sqrt[3]{q} \leq 1$, deci $q \leq 1$. Astfel rezultă că $\sqrt{q} = 2 - \sqrt{1 + 3t^2}$.

Prin urmare, $q = 5+3t^2-4\sqrt{1+3t^2}$ și $S = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{1+3t^2}\right) = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{\dfrac{s-10}{2}}\right)$. Arătăm că există un triunghi ABC ce satisface ipotezele problemei și are aria egală cu valoarea obținută, $S = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{1+3t^2}\right)$. Considerăm polinomul $f(w) = (w-x)(w-y)(w-z)$, $w \in \mathbb{R}$. Avem $f(w) = w^3 - 3w^2 + 3(1-t^2)w - \left(5+3t^2-4\sqrt{1+3t^2}\right)$, deci $f'(w) = 3(w^2-2w+1-t^2)$ are rădăcinile $1-t$ și $1+t$. Avem $f(1-t) = 2t^3-6t^2-4+4\sqrt{1+3t^2} > 0$ (prin calcule, inegalitatea este echivalentă cu $t^3(1-t)^2(t-4) < 0$, adev.) și $f(1+t) = -2t^3-6t^2-4+4\sqrt{1+3t^2} < 0$ (prin calcule, inegalitatea este echivalentă cu $t^3(t^3+6t^2+9t+4) > 0$, adev.) Rezultă că *șirul lui Rolle* asociat ecuației $f(w) = 0$ este $(-,+,-,+)$, deci rădăcinile x, y, z ale ecuației sunt reale (și distincte). Mai mult, cum $f(0) = -3t^2-5+4\sqrt{1+3t^2} < 0$ (prin calcule, inegalitatea este echivalentă cu $9\left(t^2-1\right)^2 > 0$, adev.), rezultă că $x, y, z > 0$. Dar $x+y+z = 3$, deci $x, y, z \in (0,3)$, de unde rezultă că $a, b, c > 0$. De asemenea, avem $x+y < 3 < 3+z$, de unde rezultă că $a+b > c$. Analog se obține că $a+c > b$ și $b+c > a$, ceea ce încheie demonstrația existenței triunghiului ABC cu proprietățile impuse.

M 38. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Calculați integrala* $I = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^4+(x-b)^4}\,dx.$

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Notând $c = \dfrac{b-a}{2}$ și aplicând schimbarea de variabilă $x = t + \dfrac{a+b}{2}$ avem $I = \displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{1}{(t+c)^4+(t-c)^4}\,dt = 2\int_0^c \frac{1}{(t+c)^4+(t-c)^4}\,dt$, funcția integrată fiind pară. Astfel $I = \displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^4+6t^2c^2+c^4}\,dt = \int_0^c \frac{1}{\left(t^2+3c^2\right)^2-8c^4}\,dt = \int_0^c \frac{1}{\left(t^2+3c^2-2\sqrt{2}c^2\right)\left(t^2+3c^2+2\sqrt{2}c^2\right)}\,dt$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}c^2}\int_0^c \left(\frac{1}{t^2+3c^2-2\sqrt{2}c^2} - \frac{1}{t^2+3c^2+2\sqrt{2}c^2}\right)dt = \frac{1}{4\sqrt{2}c^2}\int_0^c \left(\frac{1}{t^2+\left(c(\sqrt{2}-1)\right)^2} - \frac{1}{t^2+\left(c(\sqrt{2}+1)\right)^2}\right)dt = \frac{1}{4\sqrt{2}c^2}\left(\frac{1}{c(\sqrt{2}-1)}\operatorname{arctg}\frac{t}{c(\sqrt{2}-1)} - \frac{1}{c(\sqrt{2}+1)}\operatorname{arctg}\frac{t}{c(\sqrt{2}+1)}\right)\Bigg|_0^c$$

$= \dfrac{(\sqrt{2}+1)\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}c^3}$. Astfel înlocuind $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) = \dfrac{3\pi}{8}$ și $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) = \dfrac{\pi}{8}$, obținem că $I = \dfrac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2(b-a)^3}$.

M 39. *Determinați funcțiile continue $f, g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ care verifică simultan relațiile*

$$f^3(x) - 3f(x)g^2(x) = \cos x,\ g^3(x) - 3f^2(x)g(x) = -\sin x,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

și pentru care aria suprafeței plane cuprinse între graficele lor este:

a) maximă; *b) minimă.*

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție. Pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, înmulțind a doua relație din enunț cu $-i$ și adunând-o la prima, rezultă că $\left(f(x)+ig(x)\right)^3 = \cos x + i\sin x$, deci $(f(x), g(x)) \in \left\{(f_k(x), g_k(x)) \mid k = \overline{0,2}\right\}$, unde $f_k(x) = \cos\dfrac{x+2k\pi}{3}$ și $g_k(x) = \sin\dfrac{x+2k\pi}{3}$. Fiecare dintre cele trei perechi verifică egalitățile din enunț. Cun $f_0\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, $g_0\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f_1\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$,

$g_1\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $f_2\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right]$, $g_2\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, iar funcțiile f și g sunt continue, deci $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ și $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ sunt intervale, rezultă că $(f,g)\in\left\{(f_k,g_k)\mid k=\overline{0,2}\right\}$.

Pentru $(f,g)=(f_0,g_0)$ aria cerută este $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(f_0(x)-g_0(x))\,dx=3\left(g_0(x)+f_0(x)\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$, pentru $(f,g)=(f_1,g_1)$ aria este $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(g_1(x)-f_1(x))\,dx=3\left(-f_1(x)-g_1(x)\right)\Big|_0^{\pi/2}=3(\sqrt{3}-1)$, iar pentru $(f,g)=(f_2,g_2)$ aria este $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(f_2(x)-g_2(x))\,dx=3\left(g_2(x)+f_2(x)\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$. Deci aria este maximă pentru $(f,g)=(f_1,g_1)$ și minimă pentru $(f,g)=(f_0,g_0)$ sau $(f,g)=(f_2,g_2)$.

M 40. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $0<f'(x)<1$ pentru orice $x\in(0,1]$ și există $f''(0)\in\mathbb{R}^*$. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $x_0\in(0,1]$ și $x_{n+1}=\dfrac{x_n+f(x_n)}{2}$, pentru orice $n\geq 0$. Demonstrați că $0<x_{n+1}<x_n\leq 1$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și arătați că*

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\int_{x_{n+1}}^{x_n}f(x)\,dx\right)=\left(\frac{4}{f''(0)}\right)^2.$$

Florin Stănescu, Găești

Soluție. Considerând funcția $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=f(x)-x$, avem că φ este derivabilă, deci continuă, și $\varphi'(x)=f'(x)-1<0$ pentru orice $x\in(0,1]$. Astfel φ este strict descrescătoare, deci pentru orice $x\in(0,1]$ avem $\varphi(x)<\varphi(0)=0$, adică $f(x)<x$. Folosind această inegalitate, prin inducție după n se arată ușor că $0<x_{n+1}<x_n\leq 1$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Fie $L=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Trecând la limită în relația de recurență obținem că $L=f(L)$, cu $L\in[0,1]$. Dar $f(x)<x$ pentru $x\in(0,1]$, deci $L=0$. Conform *Teoremei de medie*, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ există $c_n\in(x_{n+1},x_n)$ a.î. $\displaystyle\int_{x_{n+1}}^{x_n}f(x)\,dx=(x_n-x_{n+1})f(c_n)$, deci $\displaystyle n^3\int_{x_{n+1}}^{x_n}f(x)\,dx=n^3f(c_n)\left(x_n-\frac{x_n+f(x_n)}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{f(c_n)}{c_n}\cdot\frac{c_n}{x_n}\cdot(nx_n)^3\cdot\frac{x_n-f(x_n)}{x_n^2}$, (1). Utilizând *Criteriul cleștelui* rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$. Folosind *Regula lui L'Hospital* obținem că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(c_n)}{c_n}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f'(x)=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{f(x_n)}{x_n}}{2}=1$ și $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-f(x_n)}{x_n^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{2x}=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=-\frac{f''(0)}{2}$. Deoarece $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<\dfrac{c_n}{x_n}<\dfrac{x_n}{x_n}$, aplicând *Criteriul cleștelui* rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{x_n}=1$. De asemenea, aplicând *Lema Stolz-Cesaro* avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{x_n+f(x_n)}-\frac{1}{x_n}}=$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\left(x_n+f(x_n)\right)}{x_n-f(x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{f(x_n)}{x_n}}{\frac{x_n-f(x_n)}{x_n^2}}=\frac{2}{-\frac{f''(0)}{2}}=-\frac{4}{f''(0)}$. Înlocuind în (1) obținem

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\int_{x_{n+1}}^{x_n}f(x)\,dx\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{4}{f''(0)}\right)^3\cdot\left(-\frac{f''(0)}{2}\right)=\left(\frac{4}{f''(0)}\right)^2.$$

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

M 81. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0} \subset [0,\infty)$ astfel încât $x_0 = x_1 = 0$ și

$$x_{n+2}^2 = 3x_{n+1}^2 - x_n^2 + \frac{1}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că $x_n \geq 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n-2},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$

Cristinel Mortici, Viforâta

M 82. Fie D, E și F punctele de intersecție ale cercului exînscris triunghiului ABC corespunzător laturii BC cu (BC), $(AB$, respectiv $(AC$, iar P și Q punctele de intersecție ale acestui cerc cu (BF), respectiv (CE). Arătați că $\dfrac{PQ \cdot EF}{PE \cdot QF} = 3.$

Miguel Ochoa Sanchez, Peru

M 83. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$. Demonstrați că

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_k} \geq \sqrt{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}.$$

Daniel Jinga, Pitești

M 84. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ are loc egalitatea

$$\sin\frac{\pi}{2^n} \sin\frac{3\pi}{2^n} \sin\frac{5\pi}{2^n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(2^{n-1}-1)\,\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2^{n-2}}}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

M 85. Demonstrați că în orice triunghi neobtuzunghic ABC are loc inegalitatea

$$(3\sqrt{3}-4)(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) + (2-\sqrt{3})\left(\sqrt{\operatorname{ctg} A} + \sqrt{\operatorname{ctg} B} + \sqrt{\operatorname{ctg} C}\right)^2 \geq 2\sqrt{3}.$$

În ce triunghiuri inegalitatea devine egalitate?

Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Clasa a X-a

M 86. Arătați că pentru orice $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea

$$9\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right)-\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)\leq 24.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

M 87. Fie $a, b \in (1, \infty)$ astfel încât $ab = 4$. Arătați că

$$\frac{1}{2\log_a(a+1)-1}+\frac{1}{2\log_b(b+1)-1}<1.$$

Dinu Teodorescu, Târgoviște

M 88. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $z^n + |z| = 2$.

Daniel Jinga, Pitești

M 89. Un număr natural nenul n se numește *interesant* dacă $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$ se divide cu $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Demonstrați că dintre orice cinci numere naturale nenule consecutive se pot alege două interesante.

Cristinel Mortici, Viforâta

M 90. Arătați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\sqrt{\frac{2ab}{c(a+b)}}+\sqrt{\frac{2bc}{a(b+c)}}+\sqrt{\frac{2ca}{b(c+a)}}\geq 3.$$

Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Clasa a XI-a

M 91. Câte soluții are ecuația $x^{2019} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathcal{S}_8$?

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 92. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că

$$\det(A+B)^2 = 8\det(A^2+B^2).$$

Daniel Jinga, Pitești

M 93. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât șirul $(n^2x_n + nx_n^3)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Arătați că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin $y_n = n^3x_n^2 + n^2x_n^4$ este convergent și calculați limita sa.

Dinu Teodorescu, Târgoviște

M 94. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+\pi^e)(2+\pi^e)\cdot\ldots\cdot(n+\pi^e)}{(1+e^\pi)(2+e^\pi)\cdot\ldots\cdot(n+e^\pi)}$.

Florică Anastase, Lehliu Gară

M 95. Pentru ce valori reale pozitive ale lui k și t inegalitatea

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \geq k\cdot\frac{|a-b|^t}{(a+b)^{t-1}}$$

are loc pentru orice numere reale pozitive a și b?

Leonard Giugiuc, România și *Tran Hong*, elev, Vietnam

Clasa a XII-a

M 96. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x*y = (2x+1)\sqrt{\frac{y^2+y+1}{3}} + (2y+1)\sqrt{\frac{x^2+x+1}{3}} - \frac{1}{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Demonstrați că $(\mathbb{R},*)$ este un grup abelian izomorf cu grupul $(\mathbb{R},+)$.

b) Arătați că $\underbrace{0*0*\ldots*0}_{\text{de 2019 ori 0}} \in \mathbb{Q}$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 97. Fie $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ și legea de compoziție $\circ:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$x\circ y = axy - ab(x+y) + b(1+ab),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, fie x_n soluția ecuației $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2n+1 \text{ ori } x} = a^p + b$, unde p este un număr natural fixat. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Marin Chirciu, Pitești

M 98. Determinați cel mai mare număr real k pentru care inegalitatea

$$(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k) \leq (1+k)^3$$

are loc pentru orice $a, b, c \in [0, \infty)$ astfel încât $a+b+c=3$.

Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin și *Costel Bălcău*, Pitești

M 99. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \to [0, 1)$ astfel încât

$$\ln\left(1+\sqrt{f(x)}\right) = x + \ln\left(1-\sqrt{f(x)}\right), \ \forall x \in [0, \infty).$$

a) Demonstrați că ecuația funcțională are soluție.

b) Arătați că f admite primitive.

c) Fie $a, b \in (0, 1)$ cu $a < b$. Arătați că $\displaystyle\int_0^{a^{b-1}} f(x)\,dx + \int_0^{b^{1-a}} \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx > 1.$

Florică Anastase, Lehliu Gară

M 100. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile cu derivatele continue astfel încât $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in [a, b]$. Demonstrați că

$$\int_a^b \sqrt{\frac{\left(f'(x)\right)^2 + \left(g'(x)\right)^2}{f^2(x)+g^2(x)}}\,dx \geq \ln\sqrt{\frac{f^2(b)+g^2(b)}{f^2(a)+g^2(a)}}.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

I 31 (număr cu cifre impare). Se dă N - număr natural cu maxim 16 cifre. Se cere să se determine cel mai mare număr natural, format cu cifre distincte impare din N. Dacă nu există un astfel de număr se va afișa mesajul NU EXISTA.

Exemple

Pentru $N = 2342358$ se va afișa 53, iar pentru $N = 426886$ se va afișa NU EXISTA.

***

I 32 (numere de telefon). Se dau două numere de telefon (10 cifre fiecare). Se cere să se determine cifrele distincte în ordine crescătoare, care se găsesc doar în unul din numerele de telefon.

Exemplu

Pentru numerele de telefon `4844595577` și `0744595677` se va afișa:

```
0 6 8
```

***

I 33 (matricole). Se dau N numere naturale ce reprezintă numerele matricole a N elevi. Se cere să se determine numărul de numere matricole care se pot scrie ca sume de trei pătrate ale unor numere naturale consecutive. Spre exemplu numărul matricol 29 verifică această proprietate pentru că $29 = 2^2 + 3^2 + 4^2$.

Cerință

Cunoscând N – numărul de numere matricole și cele N numere matricole se cere să se determine numărul de numere matricole care se pot scrie ca sume de trei pătrate ale unor numere naturale consecutive.

Date de intrare

În fișierul `matricole.in` se află pe prima linie N - număr natural și pe a doua linie cele N numere matricole, separate prin spațiu.

Date de ieșire

Fișirerul `matricole.out` conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 10000$
- Numerele matricole sunt numere naturale cu maxim 17 cifre

Exemplu

matricole.in	matricole.out	Explicație
2 29 10	1	$29 = 2^2 + 3^2 + 4^2$. 10 nu poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere naturale consecutive.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 34 (tricouri). Elevii unei școli folosesc la ora de sport tricouri care au scris pe spate un număr natural cu maxim două cifre, așa cum au jucătorii de fotbal. Directorul școlii dorește să folosească la o paradă elevii care au pe spate numere prime.

Cerință

Cunoscând N - numărul de elevi din școală și cele N numere de pe tricouri se cere să se determine numărul de elevi care participă la paradă – notat cu A, precum și cel mai mare, respectiv cel mai mic număr de pe tricourile elevilor ce vor participa la paradă - notate cu B și C.

Date de intrare

În fișierul `tricouri.in` se află pe prima linie N - număr natural și pe a doua linie cele N numere de pe tricouri, separate prin spațiu.

Date de ieșire

Fișirerul `tricouri.out` conține pe prima linie trei numere reprezentând rezultatul cerinței: A, B, C, separate prin câte un spațiu.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 100000$
- Numerele matricole sunt numere naturale cu maxim 17 cifre
- Dacă scrieți un singur număr în fișierul de ieșire nu veți primi puncte!

Exemplu

tricouri.in	tricouri.out	Explicație
7 29 10 2 10 31 29 10	4 31 2	Există 4 numere prime pe tricouri: 29, 2, 31, 29. Deci $A = 4$. Cel mai mare numar prim aflat pe un tricou este $B = 31$, iar cel mai mic număr prim aflat pe un tricou este $C = 2$.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie disponibilă: 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 35 (templieri). În anul 1119 a fost creat *Ordinul Templului*, format din templieri. Templierii erau pregătiți pentru a asigura securitatea deplasării creștinilor în timpul cruciadelor. Fiecare templier avea asociat un cod numeric ce începe cu o cifră nenulă. Comandantul templierilor dintr-o regiune a Asiei dorește să-și împartă templierii în grupe pe care să le trimită să asigure paza unor castele. Comandantul se sfătuiește cu cavalerii săi și ia decizia de a grupa templierii în funcție de cifrele codurilor acestora. Mai precis, doi templieri fac parte din aceeași grupă dacă au codul format din aceleași cifre, dar în altă ordine. Evident, nu există doi templieri cu același cod.

Cerință

Cunoscând N - numărul de templieri și cele N coduri numerice, se cere să se determine:

a) câți alți templieri sunt în aceeași grupă cu comandantul, care are ultimul cod?
b) numărul de grupe ce se vor forma.

Date de intrare

În fișierul `templieri.in` se află pe prima linie N - număr natural și pe a doua linie cele N coduri, separate prin spațiu.

Date de ieșire

Fișirerul `templieri.out` conține pe prima linie două numere reprezentând rezultatul cerințelor de la a) respectiv b), separate printr-un spațiu.

Restricții și precizări

- $2 \leq N \leq 15000$
- Codul unui templier este un număr natural cu maxim 17 cifre
- Dacă scrieți un singur număr în fișierul de ieșire nu veți primi puncte!

Exemplu

`templieri.in`	`templieri.out`	Explicație
6 231 4344 132 101 4434 4443	2 3	Grupa 1: 231 132 Grupa 2: 4344 4434 4443 Grupa 3: 101 Comandantul se află în grupa 2 și deci sunt încă 2 templieri cu el în grupă. Templierii se împart în 3 grupe.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Micul Gates, 2019)

Clasa a X-a

I 36 (cuvinte). Pentru ora de limba engleză, Tică trebuie să scrie o compunere cu cât mai multe cuvinte care încep și se termină cu aceeași literă. Compunerea trebuie alcătuită din cuvinte separate prin câte un spațiu sau punct. După ce scrie compunerea, Tică merge la Rică să vadă dacă aceasta îndeplinește condiția impusă de doamna profesoară.

Cerință

Cunoscând compunerea, scrisă pe o linie, se cere să se determine numărul de cuvinte care încep și se termină cu aceeași literă.

Date de intrare

În fișierul `cuvinte.in` se află pe prima linie textul compunerii.

Date de ieșire

Fișirerul `cuvinte.out` conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții și precizări

- Textul compunerii are maxim 100000 caractere, numai litere mici, punct și spațiu

Exemplu

`cuvinte.in`	`cuvinte.out`	Explicație
`ana and alina go.oto school.`	`3`	Compunerea are 3 cuvinte care încep și se termină cu aceeași literă: ana, alina, oto.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 37 (suma). Pentru ora de limba engleză, Tică trebuie să scrie o compunere cu cât mai multe cuvinte care sunt numere naturale, legată de populația din orașele județului. Compunerea trebuie alcătuită din cuvinte separate prin unul sau mai multe spații. După ce scrie compunerea, Tică merge la Rică să determine suma numerelor din compunere.

Cerință

Să se determine suma numerelor din compunere.

Date de intrare

În fișierul `suma.in` se află pe prima linie textul compunerii.

Date de ieșire

Fișirerul `suma.out` conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții

- Textul compunerii are maxim 100000 caractere, numai litere mici, litere mari și spațiu
- Numerele din text sunt considerate cuvinte și nu au mai mult de 15 cifre
- Nu există mai mult de 100 de numere în text

Exemplu

`suma.in`	`suma.out`	Explicație
`Pitesti are 150000 de locuitori` `Mioveni are 24021 locuitori`	`174021`	$150000 + 24021 = 174021$

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 38 (zprod). Se dau N numere complexe prin perechi de numere intregi reprezentând părțile reale, respectiv imaginare. Determinați pătratul modulului produsului acestor numere complexe.

Cerință

Cunoscând N și perechile de numere ce reprezintă numerele complexe în formatul parte_reală parte_imaginară, se cere să se determine pătratul modulului produsului acestor numere complexe.

Date de intrare

În fișierul `zprod.in` se află pe prima linie N, iar pe următoarele N linii partea reală și partea imaginară, separate printr-un spațiu, ale fiecărui număr complex.

Date de ieșire

Fișirerul `zprod.out` conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 100000$

Exemplu

`zprod.in`	`zprod.out`	Explicație
2 1 2 3 1	50	$(1{+}2i)(3{+}i) = 1 + 7i$ are pătratul modului 50.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

***

I 39 (egale). Se dau N numere complexe prin perechi de numere întregi cu maxim două cifre reprezentând părțile reale, respectiv imaginare. Determinați numărul maxim de numere complexe care au același modul.

Cerință

Cunoscând N și perechile de numere ce reprezintă numerele complexe în formatul parte_reala parte_imaginară, se cere să se determine numărul maxim de numere complexe care au același modul.

Date de intrare

În fișierul `egale.in` se află pe prima linie N, iar pe următoarele N linii partea reală și partea imaginară, separate printr-un spațiu, ale fiecărui număr complex.

Date de ieșire

Fișirerul `egale.out` conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 100000$

Exemplu

`egale.in`	`egale.out`	Explicație
3 1 2 1 1 2 1	2	$1 + 2i$ are modulul $\sqrt{5}$ $1 + i$ are modulul $\sqrt{2}$ $2 + i$ are modulul $\sqrt{5}$ Sunt două numere complexe cu același modul, $\sqrt{5}$.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

***

I 40 (**cifru**). În anul 1119 a fost creat *Ordinul Templului*, format din templieri. Templierii erau pregătiți pentru a asigura securitatea deplasării creștinilor în timpul cruciadelor. După o bătălie grea aceștia reușesc să cucerească un castel, care conține un cufăr cu documente foarte importante. Cufărul poate fi deschis doar dacă se cunoaște un *cifru*, ce poate fi determinat doar dacă sunt prelucrate textele ce sunt scrise pe holurile castelului. Castelul are N holuri și pe fiecare dintre acestea sunt scrise texte pe un rând formate din M caractere litere mari, mici și cifre. Caracterele de pe pereții holurilor se împart astfel în trei categorii: litere mici, litere mari, cifre. Pentru a găsi cifrul, la fiecare hol se determină lungimea cea mai mare a unei secvențe de caractere din aceeași categorie cu cea a ultimului caracter. Suma acestor lungimi pentru toate cele N holuri reprezintă cifrul ce deschide cufărul.

Cerință

Cunoscând N - numărul de holuri, M - numărul de caractere de pe fiecare hol și caracterele de pe fiecare hol, trebuie să determinați cifrul pentru deschiderea cufărului.

Date de intrare

În fișierul `cifru.in` se află pe prima linie N și M, numere naturale separate prin câte un spațiu și pe următoarele N linii câte M caractere (fără spații între ele) reprezentând caracterele de pe fiecare hol (o linie pentru câte un hol).

Date de ieșire

Fișirerul `cifru.out` conține pe prima linie cifrul.

Restricții și precizări

- $2 \leq N, M \leq 5000$
- Pentru 50% din teste $2 \leq N, M \leq 200$
- Caracterele de pe hol sunt litere mari, mici sau cifre
- Prin secvență înțelegem caractere aflate pe poziții consecutive

Exemplu

`cifru.in`	`cifru.out`	Explicație

`6 7`
`Ab78Ha3`
`aba5A7d`
`aYaBA7D`
`aaaBBBE`
`5555555`
`QWEF4Ea`
	`19`	Holul 1: 3 este din categoria cifre. Secvența cea mai lungă din categoria cifre este 78. Lungimea ei este 2.
		Holul 2: d este din categoria litere mici. Secvența cea mai lungă din categoria litere mici este aba. Lungimea ei este 3.
		Holul 3: D este din categoria litere mari. Secvența cea mai lungă din categoria litere mari este BA. Lungimea ei este 2.
		Holul 4: E este din categoria litere mari. Secvența cea mai lungă din categoria litere mari este BBBE. Lungimea ei este 4.
		Holul 5: 5 este din categoria cifre. Secvența cea mai lungă din categoria cifre este 5555555. Lungimea ei este 7.
		Holul 6: a este din categoria litere mici. Secvența cea mai lungă din categoria litere mici este a. Lungimea ei este 1.
		Cifrul este 2+3+2+4+7+1 = 19.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Micul Gates, 2019)

Clasele a XI-a și a XII-a

I 41 (iconex). Se dă un graf neorientat prin n - numărul de noduri, m - numărul de muchii şi prin perechile de noduri reprezentând muchiile ($1 < n < 200$).

Cerință

Pentru un graf dat, determinați numărul de componente conexe care conțin un număr impar de muchii.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului `iconex.in` se află n şi m, cu un spaţiu între ele. Pe următoarele m linii se află perechi de noduri reprezentând muchiile.

Date de ieşire

Pe prima linie a fişierului `iconex.out` se va scrie numărul din cerinţă.

Exemplu

`iconex.in`	`iconex.out`	Explicatie

`5 3`
`4 2`
`1 5`
`5 3`
	`1`	Graful conține două componente conexe,
		o componentă conexă cu 2 muchii
		și o componentă conexă cu o muchie.

Timp maxim de execuție: 1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 42 (scombinare). Pentru o pereche de numere naturale (a, b), notăm cu $\text{comb}(a, b)$ numărul de combinări de b elemente dintr-o mulțime cu a elemente. Pentru N perechi de numere naturale, se cere să se determine suma combinărilor date de aceste perechi.

Cerință

Pentru N perechi de numere naturale, determinați suma combinărilor date de acestea.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului `scombinare.in` se află N şi pe următoarele N linii perechi de numere naturale cu un spaţiu între ele.

Date de ieşire

Pe prima linie a fişierului `scombinare.out` se va scrie numărul din cerinţă.

Restricții și precizări

- $2 \leq N \leq 5000$
- Perechile conțin numere care sunt cifre

Exemplu

scombinare.in	scombinare.out	Explicatie
2 3 1 4 2	9	comb(3,1) + comb(4,2) = 3 + 6 = 9.

Timp maxim de execuție: 1 sec./test. Memorie totală disponibilă 4 MB.

Alexandru Ion Popescu, București

I 43 (tconex). Se dă un graf orientat prin n - numărul de noduri, m - numărul de arce şi perechile de noduri reprezentând arcele ($1 < n < 15$).

Cerință

Pentru un graf dat, determinați numărul de arce care nu se regăsesc în nicio componentă tare-conexă.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului `tconex.in` se află n şi m, cu un spaţiu între ele. Pe următoarele m linii se află perechi de noduri reprezentând arcele.

Date de ieşire

Pe prima linie a fişierului `tconex.out` se va scrie numărul din cerinţă.

Exemplu

tconex.in	tconex.out	Explicatie
4 5 1 4 4 3 4 1 3 2 2 3	1	Graful conține două componente tare-conexe. Arcul (4,3) nu are ambele noduri în aceeași componentă tare-conexă.

Timp maxim de execuție: 1 sec./test. Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 44 (abs). Se dă un graf neorientat ponderat conex prin n - numărul de noduri, m - numărul de muchii şi prin triplete formate din extremitățile muchiilor împreună cu ponderile corespunzătoare.

Cerință

Pentru un graf neorientat ponderat conex și un număr natural S, determinați un arbore parțial (muchiile sale) cu costul S.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului `aps.in` se află n, m și S, separate prin câte un spaţiu. Pe următoarele m linii se află triplete de numere reprezentând extremitățile și costul pentru fiecare muchie.

Date de ieşire

Pe $n-1$ linii ale fişierului `aps.out` se va scrie câte o muchie, pentru un arbore parțial de cost S.

Restricții și precizări

- $2 \leq n \leq 10$
- $2 \leq m \leq 15$
- Costurile muchiilor sunt numere cu maxim două cifre
- Pentru toate testele există soluție!

Exemplu

aps.in	aps.out	Explicatie
4 5 80 1 2 10 4 2 30 2 3 80 1 4 20 4 3 50	1 2 1 4 4 3	Graful conține un arbore parțial format din muchiile $[1,2]$, $[1,4]$ și $[4,3]$, având costul egal cu 80.

Timp maxim de execuție: 1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

***

I 45 (campanie). Se dau N puncte în plan prin coordonatele lor. Determinați aria poligonului cu vârfurile în unele din punctele date și care conține pe laturi sau în interior toate cele N puncte.

Cerință

Cunoscând N și perechile de numere ce reprezintă coordonatele a N puncte, determinați aria poligonului cu vârfurile în unele din punctele date și care conține pe laturi sau în interior toate cele N puncte.

Date de intrare

În fișierul `aria.in` se află pe prima linie N, iar pe următoarele N linii abscisa și ordonata, separate prin câte un spațiu, pentru punctele date.

Date de ieșire

Fișierul `aria.out` conține pe prima linie numărul reprezentând rezultatul cerinței.

Restricții și precizări

- $3 \leq N \leq 1000$
- Coordonatele punctelor sunt numere întregi din intervalul $[-10000, 10000]$
- Pentru toate testele există cel puțin trei puncte necoliniare

Exemplu

aria.in	aria.out	Explicație
7 0 10 5 0 5 5 0 0 5 10 2 2 2 5	50	Poligonul căutat are vârfurile în punctele $(0,0)$, $(5,0)$, $(5,10)$ și $(0,10)$. Aria sa este egală cu 50.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

***

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ŞI A INFORMATICII

Niels Henrik Abel, un Maestru al matematicii

Stelian Corneliu Andronescu [1]

Niels Henrik Abel (1802-1829) a fost un matematician genial, cu o operă strălucită. A parcurs rapid programa standard, studiind apoi lucrările originale ale marilor matematicieni: Euler, Newton, Laplace, Gauss, Lagrange. De altfel, întrebat cum de are atâtea cunoştinţe matematice, Abel a răspuns: ,,Cine doreşte să facă progrese în matematică, trebuie să-i studieze pe maeştri şi nu pe elevii acestora".

În timpul ultimului an de şcoală, Abel a făcut prima încercare de rezolvare a ecuaţiei cvintice (de gradul al cincilea), căutând o formulă explicită. Aceasta era o problemă cu care se luptaseră timp de aproape 300 de ani cei mai valoroşi matematicieni ai Europei. Obsedat de problemă, după o scurtă perioadă se apleacă din nou asupra acesteia, dar în loc să atace problema în ideea de a găsi o formulă, este acum hotărât să arate că ecuaţia nu poate fi rezolvată printr-o formulă. După câteva luni de lucru intens, studentul de 21 de ani din Norvegia reuşeşte să demonstreze riguros că este imposibil de găsit o soluţie a ecuaţiei cvintice care să poată fi exprimată sub forma unei formule simple, implicând cele patru operaţii aritmetice elementare şi radicali.

Din păcate, genialul matematician a avut o situaţie financiară precară, toată viaţa fiind urmărit de sărăcie. Chiar şi lucrarea în care a demonstrat imposibilitatea rezolvării algebrice a ecuaţiilor menţionate a fost redactată pe doar şase pagini, pentru a economisi banii necesari pentru tipărire. Exact când geniul matematic al lui Abel începuse să strălucească, această situaţie se deteriora. De altfel, din cauza dificultăţilor financiare, starea sa de sănătate se va înrăutăţi, Abel decedând pe 6 aprilie 1829.

Chiar dacă cea mai mare parte a operei sale a fost scrisă în doar şapte ani, impactul său asupra lumii matematice a fost uriaş. Renumitul matematician Charles Hermite spunea: ,,Abel a lăsat matematicienilor suficient pentru a-i ţine ocupaţi timp de 500 de ani!".

În anul 2002 guvernul norvegian a instituit un fond de 22 de milioane de dolari pentru conferirea *Premiului Abel în matematică*. În mod ironic, opera strălucită a celui mai sărac matematician este celebrată printr-o recompensă financiară foarte mare.

În toamna anului 1826 la Paris a existat şansa unei întâlniri, dar aceasta nu a mai avut loc niciodată. Necunoscut lui Abel, Galois nu avea decât 15 ani, dar începuse să fie obsedat de aceeaşi problemă: ,,Putea fi cvintica rezolvată printr-o formulă?". Nu putem să nu ne punem întrebarea: cum s-ar fi schimbat vieţile acestor două genii, în urma unei astfel de întâlniri?

Bibliografie

[1] M. Livio, *Ecuaţia ce n-a putut fi rezolvată*, Ed. Humanitas, Bucureşti, 2007.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, corneliuandronescu@yahoo.com

Revistă sponsorizată de

ROWEB Development SRL

și

OSF Global Services SRL